DOI: 10.34031/2618-7183-2019-2-3-12-27

**Полоз М.А.*,
Яссер Гариб Сами,
Шевченко А.В., кандидат технических наук, доцент,
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова, Россия**
*Ответственный автор E-mail: max.poloz@inbox.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ШАГОВО-ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ПРИ РАСЧЕТЕ ИЗГИБАЕМЫХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ СБОРНО-МОНОЛИТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Аннотация: сборно-монолитные железобетонные конструкции с и без предварительного напряжения арматуры используются как вновь проектируемые самостоятельные, так и являются результатом проведения работ по усилению существующих конструкций наращиванием сечения. В обоих случаях поперечное сечение таких элементов рассматривается как двухслойное, а получающийся составной элемент работает под нагрузкой в условиях, распределенных между слоями внутренних усилий, механизм и фактическая величина распределения которых зависит от физико-механических характеристик, расчетной схемы и параметров контактного взаимодействия слоев. При расчете и конструировании предварительно напряженных железобетонных сборно-монолитных элементов податливость шва сдвига обычно не учитывается, что осложняет анализ действительного напряженно-деформированного состояния конструкции и содержит определенный нераскрытый потенциал ее рационального проектирования. Одним из возможных направлений в решении задачи, учитывающей сдвиг контактного шва, является использование вариационных принципов строительной механики при расчете таких конструкций, как стержней составного сечения. В рамках данной работы рассматриваются вопросы практической применимости при структурном анализе составного железобетонного сборно-монолитного стержня вариационных принципов строительной механики на основе метода В.З. Власова – И.Е. Милейковского в форме перемещений в сочетании с шагово-итерационным методом расчета. Приведены результаты численных расчетов по предложенной методике, что позволяет учитывать специфику работы связей сдвига сборного и монолитного слоя, осуществлять практический учет податливости шва, а также учитывать физическую нелинейность характеристик материалов, что позволяет осуществлять рациональное проектирование сборно-монолитных конструкций.

Ключевые слова: вариационный метод Власова-Милейковского, напряженно-деформированное состояние, составной стержень, сборно-монолитный железобетон, предварительное напряжение арматуры, физическая нелинейность материалов

Введение

Сборно-монолитные железобетонные конструкции с и без предварительного напряжения арматуры используются как вновь проектируемые самостоятельные, так и являются результатом проведения работ по усилению существующих конструкций наращиванием сечения [8, 7, 10]. В обоих случаях поперечное сечение таких элементов рассматривается как двухслойное, а получающийся составной элемент работает под нагрузкой в условиях распределенных между слоями внутренних усилий, механизм и фактическая величина распределения которых зависит от физико-механических характеристик, расчетной схемы и параметров контактного взаимодействия слоев, что делает детальный учет последнего обстоятельства важным фактором обеспечения достоверности расчетных параметров напряженно-деформированного состояния конструкций, а используемый при этом аналитический аппарат строительной механики – инструментом существенного повышения рациональности проектирования конструкций [11-15].

В качестве предлагаемого расчетного аппарата для деформационного расчета стержневых сборно-монолитных конструкций принят вариационный метод В.З. Власова в форме метода перемещений [2, 3, 8]. Для построения аналитических зависимостей используются общие гипотезы смешанного метода Власова в сочетании с дополнительными гипотезами, касающимися особенностей работы составного сечения и специфики деформирования железобетона с учетом критерия предельной растяжимости бетона и режима нагружения конструкции. Предпосылки для расчета следующие:

- для составного элемента в целом, а также для отдельных его составляющих брусьев справедлива гипотеза Бернулли (гипотеза плоских сечений);
- в работе на сдвиг по шву между элементами учитывается работа материала шва, прилегающего к шву элемента контактной зоны бетонов соединяемых брусьев и поперечных стержней-нагелей (при их наличии).

– учет предварительного напряжения арматуры моделируется эквивалентным из условий прочности и жесткости выбором единичных функций, распределенных по высоте поперечного сечения элемента.

Методы и материалы

Расчет сборно-монолитной стержневой конструкции представляется как расчет составного стержня, состоящего из двух брусков, с применением вариационного полуаналитического метода в форме перемещений [1]. В данном случае необходимо раскрыть статическую неопределенность составного стержня, для чего по аналогии расчета оболочек из трансверсально-изотропного материала оставим две группы интегральных уравнений, представленных в табл. 1. Согласно принятым гипотезам изменение деформаций по высоте сечения можно считать линейными. При этом составляющие вектора перемещений представлены в следующем виде:

$$U(x, z) = \sum_{i=1}^{\Omega_1} U_0(x) \xi_0(z) - \sum_{i=0}^{\Omega_0} \bar{U}_i(x) \bar{\xi}_i(z), \quad (1)$$

$$V_0(x, z) = \sum_{i=0}^{\Omega_0} V_i(x) \xi_i(z), \quad (2)$$

$$U_i(x) = -V_i'(x), \quad (3)$$

где $\bar{U}_i(x)$, $V_i(x)$ – искомые функции обобщенных перемещений; $\bar{\xi}_i(z)$, $\xi_0(z)$ – единичные функции, зависящие от координаты z по сечению сборно-монолитного стержня; Ω_0 , Ω_1 – число степеней свободы поперечной полоски шириной dx .

По аналогии с выводом формул для оболочек будем рассматривать поперечное сечение стержня как шарнирно-стержневой полигон [8, 10]. При предложенном линейном распределении единичных функций по ширине грани полигона число степеней свободы Ω_1 поперечной полоски шириной dx будет равно числу узлов полигона.

Число степеней свободы Ω_1 определяется количеством единичных функций $\bar{\xi}_i(z)$ и соответствующим им искомым обобщенным функциям $\bar{U}_i(x)$, в данном случае $\Omega_1 = 2$. Для учета связей сдвига добавляется число степеней свободы Ω_0 . Этим числом описываются единичные функции $\xi_0(z)$ и соответствующие им искомым обобщенным функциям продольных перемещений $U_0(x)$, для данного случая $\Omega_0 = 1$.

Таблица 1

Система уравнений метода перемещений для расчета сборно-монолитного составного стержня

Table 1

The system of equations of the displacement method for calculating a precast-monolithic composite rod

Группы уравнений	Функции		Свободные члены
	$\bar{U}_c(x)$	$V_i(x)$	
I	$\sum_c (J_{dc} D^2 - b_{dc})$	$-\sum_i J_{di}^* D^3$	$\bar{p}_d$
II	•	$\sum_i J_{ji} D^4$	$-(p'_j + q_j)$

В табл. 1 приняты следующие обозначения: D^n – оператор дифференцирования функций $\bar{U}_c(x)$, $V_i(x)$ по переменной x n раз. Свободные члены $\bar{p}_d$, p'_j , q_j приняты как интегралы внешней нагрузки, умноженные на соответствующие единичные функции, взятые по поперечному сечению составного стержня. q_j – внешняя равномерно распределенная нагрузка, приложенная к составному стержню. p'_j – функция обобщенных поперечных усилий в составном стержне. $\bar{p}_d$ – преднапряжение составного стержня. Таким образом, для определения трех независимых групп обобщенных перемещений $\bar{U}_i(x)$, $V_i(x)$ вводится «основная система» метода перемещений, для чего узлы элементарной полоски шириной dx закрепляются фиктивными связями, количество которых равно числу степеней свободы. Для стержневых конструкций в качестве применения данной методики целесообразнее использовать так называемые фиктивные связи (полисвязи), т.е. закрепление сечения на множестве точек, являющееся в целом единой связью для элементарной полоски [9, 10].

Вычисление коэффициентов уравнений табл. 1 производится интегрированием соответствующих функций единичных перемещений по следующим формулам:

$$\left\{ \begin{aligned} J_{dc} &= \int_h A_1 \bar{\xi}_d(z) \bar{\xi}_c(z) dz; \\ J_{di}^* &= \int_h A_1 \bar{\xi}_d(z) \xi_i(z) dz; \\ J_{ji} &= \int_h A_1 \xi_j(z) \xi_i(z) dz; \\ b_{dc} &= G_d [\bar{\xi}_d^H(z) - \bar{\xi}_d^e(z)] \cdot [\bar{\xi}_c^H(z) - \bar{\xi}_c^e(z)]; \\ \bar{p}_d &= \int_h q_x \bar{\xi}_d(z) dz; \\ q_j &= \int_h q_z \xi_j'(z) dz; \\ p_j' &= \int_h \frac{\partial q_x}{\partial x} \xi_j(z) dz. \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Для составления канонических уравнений метода перемещений приравняются нулю реакции в фиктивных связях и внешние нагрузки [4]. В результате получаем совместную систему из двух групп уравнений равновесия.

Результаты и обсуждения

В каждой точке сборно-монолитной конструкции при нагружении равномерно распределенной нагрузкой (рис. 1) разложим компоненты вектора перемещений в следующем виде:

$$V(x, z) = V_0(x) \frac{\partial \xi_0(z)}{\partial z}, \quad (5)$$

$$U(x, z) = -V_0'(x) \xi_0(z) + \bar{U}_1(x) \bar{\xi}_1(z) + \bar{U}_2(x) \bar{\xi}_2(z). \quad (6)$$

Рис. 1. Расчетная схема преднапрягаемого сборно-монолитного железобетонного элемента при равномерно распределенном нагружении

Fig. 1. Design scheme of a prestressed precast-monolithic reinforced concrete element with uniformly distributed loading

Единичные функции $\xi_0(z)$, $\bar{\xi}_1(z)$, $\bar{\xi}_2(z)$ описывают перемещения стержня от изгиба, сдвига и растяжения (сжатия) соответственно (рис. 2). Искомые обобщенные функции $V_0(x)$, $\bar{U}_1(x)$, $\bar{U}_2(x)$ характеризуют изгиб, сдвиг и растяжение (сжатие) соответственно [1].

Рис. 2. Распределение единичных функций перемещений по высоте сечения сборно-монолитного железобетонного элемента

Fig. 2. Distribution of unit displacement functions along the height sections of precast-monolithic reinforced concrete element

Система расчетных уравнений принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \bar{J}_{11}\bar{U}_1''(x) - b_{11}\bar{U}_1(x) - J_{10}^*V_0'''(x) + J_{12}^*\bar{U}_2''(x) + \bar{p}_1 = 0; \\ \bar{J}_{21}\bar{U}_1''(x) + \bar{J}_{22}\bar{U}_2''(x) = 0; \\ -J_{10}^*\bar{U}_1'''(x) + J_{00}V_0^{IV}(x) - J_{20}^*\bar{U}_2'''(x) - q_0 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Интегрируя третье уравнение системы уравнений (6), учитывая, что $J_{20}^*\bar{U}_2'''(x) = 0$, получим:

$$\begin{cases} \bar{J}_{11}\bar{U}_1''(x) - b_{11}\bar{U}_1(x) - J_{10}^*V_0'''(x) + J_{12}^*\bar{U}_2''(x) + \bar{p}_1 = 0; \\ \bar{J}_{21}\bar{U}_1''(x) + \bar{J}_{22}\bar{U}_2''(x) = 0; \\ -J_{10}^*\bar{U}_1'''(x) + J_{00}V_0'''(x) - q_0x + C = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Выразим из системы (7) обобщенную функцию изгиба $V_0'''(x)$:

$$V_0'''(x) = \frac{J_{10}^*\bar{U}_1''(x) + q_0x - C}{J_{00}}. \quad (9)$$

Искомое дифференциальное уравнение, приводящее к решению данной задачи имеет вид [1]:

$$\bar{U}_1''(x) - \lambda^2\bar{U}_1(x) - Aq_0x + \bar{C} = 0, \quad (10)$$

где, коэффициенты уравнения (10) находятся по формулам:

$$\lambda^2 = \frac{b_{11}}{\bar{J}_{11} - \frac{(J_{10}^*)^2}{J_{00}} - \frac{(\bar{J}_{12})^2}{\bar{J}_{22}}}, \quad (11)$$

$$A = \frac{\frac{\bar{J}_{12}}{J_{00}}}{\bar{J}_{11} - \frac{(J_{10}^*)^2}{J_{00}} - \frac{(\bar{J}_{12})^2}{\bar{J}_{22}}}, \quad (12)$$

$$\bar{C} = \frac{1}{\bar{J}_{11} - \frac{(J_{10}^*)^2}{J_{00}} - \frac{(\bar{J}_{12})^2}{\bar{J}_{22}}}. \quad (13)$$

Граничные условия могут задаваться или относительно кинематических факторов, которые формулируются относительно функций обобщенных перемещений $\bar{U}_c(x), U_i(x), V_i(x)$ или относительно статических моментов $M(x), N(x), T_c(x)$, которые определяются из выражений:

$$T_c(x) = \int_A \sigma \bar{\xi}_c(z) dA; \quad (14)$$

$$M(x) = \int_A \sigma \xi_0(z) dA; \quad (15)$$

$$N(x) = \int_A \sigma \xi_1(z) dA. \quad (16)$$

Так, в случае, если конец составного стержня жестко зашпелен, то функции обобщенных перемещений примут следующие значения:

$$\bar{U}_c(x) = 0, V_0(x) = 0, V_0'(x) = 0. \quad (17)$$

Если на торце стержня отсутствует препятствия сдвигу, то граничные условия примут следующий вид:

$$T_c = 0, T_c'' = 0, V_0' = \varphi, \quad (18)$$

где φ – угол поворота составного стержня.

Таким образом, общее решение системы уравнений (8) принимает вид:

$$U_1(x) = C_1 \operatorname{sh}(\lambda x) + C_2 \operatorname{ch}(\lambda x) + \left(-\frac{Aq_0}{\lambda^2} \right) x + C_3. \quad (19)$$

Т.к. $C_2 \operatorname{ch}(\lambda x) = 0$, найдем из (18) вертикальные перемещения V_0 :

$$V_0(x) = \frac{C_1 J_{10}^*}{J_{00} \lambda} \operatorname{ch}(\lambda x) + \frac{B J_{10}^*}{2 J_{00}} x^2 + \frac{q_0}{24 J_{00}} x^4 + \frac{C_4}{6} x^3 + \frac{C_5}{2} x^2 + C_6 x + C_7. \quad (20)$$

где C_1, C_4, C_5, C_6, C_7 – постоянные интегрирования, а $B = -\frac{Aq_0}{\lambda^2}$.

Решение системы уравнений (8) имеет вид:

$$\bar{U}(x) = \bar{U}_2(x) \bar{\xi}_2(z) + \bar{U}_1(x) \bar{\xi}_1(z) - V_0'(x) \xi_0(z), \quad (21)$$

Решение (26) для симметрично нагруженных расчетных схем:

$$\bar{U}_1(x) = C_1 \operatorname{sh}(\lambda x) - \frac{Aq_0 x}{\lambda^2}, \quad (22)$$

$$\bar{U}_2(x) = \left(-\frac{\bar{J}_{21}}{\bar{J}_{22}} \right) \left[C_1 \operatorname{sh}(\lambda x) - \frac{Aq_0 x}{\lambda^2} \right] + C_2 x, \quad (23)$$

$$V_0(x) = \left(\frac{J_{10}^*}{J_{00}} \right) \left[\frac{C_1 \operatorname{ch}(\lambda x)}{\lambda} - \frac{Aq_0 x^2}{2 \lambda^2} \right] + \frac{q_0 x^4}{24 J_{00}} + C_3 x^2 + C_4. \quad (24)$$

Таким образом, получено общее решение нахождения напряженно-деформированного состояния сборно-монолитной конструкции как составного стержня с учетом работы контактного шва в упругой стадии.

Для построения расчетных уравнений для сборно-монолитного составного стержня с учетом физической нелинейности материалов составляется новая система разрешающих уравнений, которая имеет вид:

$$\begin{cases} \bar{J}_{21} \bar{U}_1'(x) + \bar{J}_{22} \bar{U}_2'(x) - J_{02}^* V_0''(x) = \bar{P}_1 = N, \\ J_{01}^* \bar{U}_1'(x) + J_{02}^* \bar{U}_2'(x) - J_{00} V_0''(x) = M, \\ \bar{J}_{11} \bar{U}_1'(x) - J_{10}^* V_0''(x) + \bar{J}_{12} \bar{U}_2'(x) = T - \bar{p}_1. \end{cases} \quad (25)$$

Жесткостные коэффициенты системы уравнений (25) при функциях $\bar{U}_1'(x)$, $\bar{U}_2'(x)$, $V_0''(x)$, сдвига, растяжения (сжатия) и изгиба, соответственно, будут равны:

$$\begin{aligned} J_{01}^* &= \sum_{j=1}^n \nu_{b,j} E_{b,j} b_j h_j \bar{\xi}_1(z) \xi_0(z) + \sum_{j=1}^n \nu_{bt,j} E_{bt,j} b_j h_j \bar{\xi}_1(z) \xi_0(z) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \nu_{s,j} E_{s,j} A_{s,j} \bar{\xi}_1(z) \xi_0(z); \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} J_{02}^* &= \sum_{j=1}^n \nu_{b,j} E_{b,j} b_j h_j \bar{\xi}_2(z) \xi_0(z) + \sum_{j=1}^n \nu_{bt,j} E_{bt,j} b_j h_j \bar{\xi}_2(z) \xi_0(z) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \nu_{s,j} E_{s,j} A_{s,j} \bar{\xi}_2(z) \xi_0(z); \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} J_{00} &= \sum_{j=1}^n \nu_{b,j} E_{b,j} b_j h_j \xi_0^2(z) + \sum_{j=1}^n \nu_{bt,j} E_{bt,j} b_j h_j \xi_0^2(z) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \nu_{s,j} E_{s,j} A_{s,j} \xi_0^2(z); \end{aligned} \quad (28)$$

$$\bar{J}_{11} = \sum_{j=1}^n \nu_{b,j} E_{b,j} b_j h_j \bar{\xi}_1^2(z) + \sum_{j=1}^n \nu_{bt,j} E_{bt,j} b_j h_j \bar{\xi}_1^2(z) + \sum_{j=1}^n \nu_{s,j} E_{s,j} A_{s,j} \bar{\xi}_1^2(z); \quad (29)$$

$$\bar{J}_{22} = \sum_{j=1}^n v_{b,j} E_{b,j} b_j h_j \bar{\xi}_2^2(z) + \sum_{j=1}^n v_{bt,j} E_{bt,j} b_j h_j \bar{\xi}_2^2(z) + \sum_{j=1}^n v_{s,j} E_{s,j} A_{s,j} \bar{\xi}_2^2(z); \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \bar{J}_{12} = & \sum_{j=1}^n v_{b,j} E_{b,j} b_j h_j \bar{\xi}_2(z) \bar{\xi}_1(z) + \sum_{j=1}^n v_{bt,j} E_{bt,j} b_j h_j \bar{\xi}_2(z) \bar{\xi}_1(z) + \\ & + \sum_{j=1}^n v_{s,j} E_{s,j} A_{s,j} \bar{\xi}_2(z) \bar{\xi}_1(z). \end{aligned} \quad (31)$$

где первое слагаемое относится к сжатой зоне бетона, второе – к растянутой зоне бетона, а третье – к арматуре; n – количество предварительно определенных слоев, на которые был разбит составной стержень (рис. 3), относящихся к заданным параметрам $\bar{U}'_1(x)$, $\bar{U}'_2(x)$, $V''_0(x)$; $E_{b,j}$ – начальный модуль упругости бетона сжатой зоны в j -том слое стержня; $E_{bt,j}$ – модуль упругости бетона растянутой зоны в j -том слое стержня; $E_{s,j}$ – модуль упругости арматуры в j -том слое стержня; $A_{s,j}$ – площадь поперечного сечения арматуры в j -том слое стержня; v_b – коэффициент изменения секущего модуля бетона сжатой зоны в j -том слое стержня; v_{bt} – коэффициент изменения секущего модуля бетона растянутой зоны в j -том слое стержня; v_s – коэффициент изменения секущего модуля арматуры в j -том слое стержня.

Рис. 3. Поперечное сечение сборно-монолитного железобетонного составного элемента, разбитого на n слоёв

Fig. 3. Cross section of precast-reinforced concrete composite element divided into n layers

Из системы уравнений (25) выразим обобщенные функции изгиба, сдвига и растяжения (сжатия) соответственно:

$$\begin{cases} V''_{0,(i)}(x) = \frac{-M + J_{01}^* \bar{U}'_{1,(i-1)}(x) + J_{02}^* \bar{U}'_{2,(i-1)}(x)}{J_{00}}, \\ \bar{U}'_{1,(i)}(x) = \frac{T_{i-1} - \bar{P}_1 + J_{10}^* V''_{0,(i-1)}(x) - \bar{J}_{12} \bar{U}'_{2,(i-1)}(x)}{\bar{J}_{11}}, \\ \bar{U}'_{2,(i)}(x) = \frac{\bar{p}_1 - \bar{J}_{21} \bar{U}'_{1,(i-1)}(x) + J_{02}^* V''_{0,(i-1)}(x)}{\bar{J}_{22}}. \end{cases} \quad (32)$$

где (i) – номер итерации.

Далее находим высоту сжатой зоны (рис. 4) составного железобетонного стержня при изгибе $z_{0,i}$:

$$z_{0,(i)} = \frac{h_H - h_B}{\varepsilon_{0,H,(i)} - \varepsilon_{0,B,(i)}} \varepsilon_{0,B,(i)} - h_B, \quad (33)$$

где h_H и h_B – высота нижнего и верхнего слоя конструкции, соответственно (относительно шва сдвига); (i) – номер итерации; $\varepsilon_{0,H}$ и $\varepsilon_{0,B}$ – относительные деформации нижнего и верхнего слоев бетона за вычетом деформаций сдвига и растяжения (сжатия), соответственно:

Рис. 4. Положение центра тяжести составного стержня $z_{0,i}$, а также относительные деформации в поперечном сечении стержня $\varepsilon_{0,H}$ и $\varepsilon_{0,B}$.

Fig. 4. The position of the gravity center of the composite rod $z_{0,i}$, as well as the relative strains in the cross section of the rod $\varepsilon_{0,H}$ and $\varepsilon_{0,B}$

$$\varepsilon_{0B,i} = \xi_{0,i-1}(-h_B)V''_{0,i-1}(x) - \xi_{1,i-1}(-h_B)\bar{U}'_{1,i-1}(x) - \xi_{2,i-1}(-h_B)\bar{U}'_{2,i-1}(x) \quad (34)$$

$$\varepsilon_{0H,i} = \xi_{0,i-1}(h_H)V''_{0,i-1}(x) - \xi_{1,i-1}(h_H)\bar{U}'_{1,i-1}(x) - \xi_{2,i-1}(h_H)\bar{U}'_{2,i-1}(x) \quad (35)$$

Преобразовывая выражение (33) получаем, что параметр положения центра тяжести сечения z_0 в i -той итерации в сечении элемента будет определяться по формуле:

$$z_{0,i} = \frac{h_H - h_B}{\xi_{0,i-1}(h_H) - \xi_{0,i-1}(-h_B)} \xi_{0,i-1}(-h_B) - h_B, \quad (36)$$

Для решения поставленной задачи в упругой стадии справедливо выражение:

$$\bar{\xi}_1(z) = \frac{\varepsilon_B - V''_0(x)\xi_0(-h_B) - \bar{U}'_2(x)\bar{\xi}_2(-h_B)}{\bar{U}'_1(x)}, \quad (37)$$

$$\bar{\xi}_2(z) = \frac{\varepsilon_H - V''_0(x)\xi_0(h_H) - \bar{U}'_1(x)\bar{\xi}_1(h_H)}{\bar{U}'_2(x)}, \quad (38)$$

где ε_B и ε_H – полные относительные деформации крайних фибровых волокон бруса.

Для решения данной задачи с учетом физической нелинейности работы материалов выражения (37) и (38) нужно скорректировать при помощи коэффициентов α_1 и α_2 , которые как раз и учитывают фактор физической нелинейности работы материалов (рис. 5):

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{1,i} \bar{\xi}_{1,i-1}(h_H) \bar{U}'_{1,i-1}(x) &= \varepsilon_{H,i-1} - \bar{U}'_{2,i-1}(x) \bar{\xi}_{2,i-1}(-h_B) + \\ &\quad + V''_{0,i-1}(x) \xi_{0,i-1}, \\ \alpha_{2,i} \bar{\xi}_{2,i-1}(h_H) \bar{U}'_{2,i-1}(x) &= \varepsilon_{H,i-1} - \bar{U}'_{1,i-1}(x) \bar{\xi}_{1,i-1}(-h_B) + \\ &\quad + V''_{0,i-1}(x) \xi_{0,i-1}. \end{aligned} \right. \quad (39)$$

Выражая из (39) α_1 и α_2 получаем:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{1(i)} &= \frac{\varepsilon_{H(i-1)} - \bar{U}'_{2(i-1)}(x) \bar{\xi}_{2(i-1)}(-h_B) + V''_{0(i-1)}(x) \xi_{0(i-1)}}{\bar{\xi}_{1(i-1)}(h_H) \bar{U}'_{1(i-1)}(x)}, \\ \alpha_{2(i)} &= \frac{\varepsilon_{H(i-1)} - \bar{U}'_{1(i-1)}(x) \bar{\xi}_{1(i-1)}(-h_B) + V''_{0(i-1)}(x) \xi_{0(i-1)}}{\bar{\xi}_{2(i-1)}(h_H) \bar{U}'_{2(i-1)}(x)}. \end{aligned} \right. \quad (40)$$

С учетом коэффициентов, учитывающих фактор физической нелинейности работы материалов, α_1 и α_2 выражения (37) и (38) примут вид:

$$\alpha_{1(i)} \bar{\xi}_{1(i-1)}(z) = \frac{\varepsilon_{B(i-1)} - V''_{0(i-1)}(x) \xi_{0(i-1)}(-h_B) - \bar{U}'_{2(i-1)}(x) \bar{\xi}_{2(i-1)}(-h_B)}{\bar{U}'_{1(i-1)}(x)}, \quad (41)$$

$$\alpha_{2(i)} \bar{\xi}_{2(i-1)}(z) = \frac{\varepsilon_{H(i-1)} - V''_{0(i-1)}(x) \xi_{0(i-1)}(h_H) - \bar{U}'_{1(i-1)}(x) \bar{\xi}_{1(i-1)}(h_H)}{\bar{U}'_{2(i-1)}(x)}, \quad (42)$$

где (i) – номер итерации; $(i-1)$ – номер предыдущей итерации.

Рис. 5. Распределение единичных функций перемещений по высоте сечения составного стержня с учетом физической нелинейности работы материалов

Fig. 5. Distribution of unit displacement functions along the height of the cross section of a composite rod, taking into account the physical nonlinearity of the work of materials

На каждом итерационном шаге вычислений изменяются не только напряжения и деформации каждого слоя, но и одновременно меняется величина сдвигающей силы T_i в сечении составного стержня:

Т.к. $\tau_i = G_0 \bar{U}_1(x)$, то сдвигающее усилие можно найти из условия:

$$T(x) = \int_0^x G_0 U(x) dx, \quad (43)$$

Подставляя в формулу (43) выражение (19) получим:

$$T(x) = G_0 \left(\frac{C_1}{\lambda} ch(\lambda x) - \frac{Aq_0 x^2}{2\lambda^2} + C^* \right), \quad (44)$$

$$T''(x) = C_1 \lambda ch(\lambda x) - \frac{Aq_0}{\lambda^2}, \quad (45)$$

Граничные условия для свободно сдвигающихся относительно друг друга торцов составного стержня будут следующими:

$$T\left(\frac{L}{2}\right) = G_0 \left(\frac{C_1}{\lambda} ch\left(\lambda \frac{L}{2}\right) - \frac{Aq_0 L^2}{8\lambda^2} + C^* \right) = 0, \quad (46)$$

$$T''\left(\frac{L}{2}\right) = 0, \quad (47)$$

Свободные члены уравнения (46) C_1 и C^* находятся из формулы:

$$C_1 = \frac{Aq_0}{\lambda^3 ch\left(\lambda \frac{L}{2}\right)}, \quad (48)$$

$$C^* = \frac{Aq_0 L^2}{8\lambda^2} - \frac{C_1}{\lambda} ch\left(\lambda \frac{L}{2}\right), \quad (49)$$

Таким образом, сдвигающее усилие T_i в сечении находится из формулы (44) для каждой итерации:

$$T_i(x) = G_0 \frac{A_i q_0}{\lambda_i^2} \left(\frac{ch(\lambda_i x)}{ch(\lambda_i \frac{L}{2})} - \frac{x^2}{2} + \frac{L^2}{8} - 1 \right), \quad (50)$$

В качестве численной реализации методики рассмотрим расчет составной сборно-монолитной плиты перекрытия из двух брусьев, в которой нижняя сборная часть представлена преднапрягаемым ячеистым пенобетоном, а верхняя – монолитным железобетоном (рис. 6).

Рис. 6. Расчетная схема составного стержня (пример расчета)

Fig. 6. Composite rod design diagram (calculation example)

Расчетная схема представляет собой изгибаемый, предварительно напряженный железобетонный сборно-монолитный стержень пролетом 5800 мм, нагруженный равномерно распределенной нагрузкой q_0 .

Величина усилия предварительного напряжения арматуры в нижнем бруске $\bar{p}_1 = 30$ кН.

Геометрические характеристики сечений брусьев, составляющих стержень:

– для нижнего бруска из ячеистого пенобетона автоклавного твердения класса В7,5: ширина $b_1 = 1000$ мм, высота $h_1 = 150$ мм, начальный модуль упругости бетона $E_b = 5500$ МПа.

– для верхнего бруска из тяжелого бетона класса В35: ширина $b_2 = 1000$ мм, высота $h_2 = 60$ мм, начальный модуль упругости бетона $E_b = 34500$ МПа.

Модуль сдвига $G_0 = 1800$ МПа.

Диаграмма « σ – ε » для ячеистого бетона автоклавного твердения В7,5 при сжатии и при растяжении представлена на рис. 7.

Рис. 7. Диаграмма « σ – ε » для бетона класса В7,5: а) – для сжатия; б) – для растяжения

Fig. 7. Diagram « σ – ε » for concrete of class B7,5: а) – for compression; б) – for stretching

Диаграмма « σ – ε » для тяжелого бетона В35 при сжатии и при растяжении представлена на рис. 8.

Рис. 8. Диаграмма « σ – ε » для бетона класса В35: а) – для сжатия; б) – для растяжения

Fig. 8. Diagram « σ – ε » for concrete of class B35: a) – for compression; b) – for stretching

Преднапрягаемая арматура класса А600 Ø14 мм, арматура без предварительного напряжения в верхнем брусе класса А600 Ø6 мм. Диаграмма « σ – ε » для арматуры класса А600 представлена на рис. 9.

Рис. 9. Диаграмма « σ – ε » для арматуры класса А600

Fig. 9. Diagram « σ – ε » for reinforcement A600 class

Расчет плиты перекрытия выполнялся шагово-итерационным методом, шагом загрузки 0,5 кН/м. Расчет показал, что разрушающая нагрузка составила 19,5 кН/м. Распределение деформаций и напряжений по высоте сечения элемента при разрушающей нагрузке даны в табл. 2.

Таблица 2

Результаты расчета по первой группе предельных состояний

Table 2

Calculation results for the first group of limit states

№ участка	площадь участка $A_{b,j}$, мм ²	z_b , мм	площадь участка $A_{s,j}$, мм ²	z_s , мм	$\varepsilon_{b, [i-1]}$	$E_{b, [i-1]}$, МПа	$\sigma_{b, [i-1]}$, МПа	$E_{s, [i-1]}$, МПа	$\sigma_{s, [i-1]}$, МПа
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3000	1,5			-0,004054500	5703,90	-23,13		
2	3000	4,5			-0,003580400	6635,50	-23,76		
3	3000	7,5			-0,003106300	7870,30	-24,45		
4	3000	10,5			-0,002632200	9538,60	-25,11		
5	3000	13,5			-0,002158100	11813,00	-25,49		
6	3000	16,5			-0,001684000	14884,40	-25,07		
7	3000	19,5			-0,001209900	18911,20	-22,88		
8	3000	22,5			-0,000735800	24008,50	-17,67		
9	3000	25,5			-0,000261700	30344,80	-7,94		
10	3000	28,5			0,000212500	0,00	0,00		
11	3000	31,5			0,000686600	0,00	0,00		
12	3000	34,5			0,001160700	0,00	0,00		
13	3000	37,5			0,001634800	0,00	0,00		
14	3000	40,5			0,002108900	0,00	0,00		
15	3000	43,5			0,002583000	0,00	0,00		

Продолжение таблицы 2
Continuation of the table 2

16	3000	46,5	254,00	46,5	0,003057100	0,00	0,00	200000,00	611,42
17	3000	49,5			0,003531200	0,00	0,00		
18	3000	52,5			0,004005300	0,00	0,00		
19	3000	55,5			0,004479400	0,00	0,00		
20	3000	58,5			0,004953500	0,00	0,00		
21	3530	62,03			-0,001681700	4101,10	-6,90		
22	3530	65,56			-0,001123800	4897,60	-5,50		
23	3530	69,09			-0,000566000	5324,30	-3,01		
24	3530	72,62			-0,000008100	5498,80	-0,04		
25	3530	76,15			0,000549700	0,00	0,00		
26	3530	79,68			0,001107600	0,00	0,00		
27	3530	83,21			0,001665500	0,00	0,00		
28	3530	86,74			0,002223300	0,00	0,00		
29	3530	90,27			0,002781200	0,00	0,00		
30	3530	93,8			0,003339100	0,00	0,00		
31	3530	97,33			0,003896900	0,00	0,00		
32	3530	100,86			0,004454800	0,00	0,00		
33	3530	104,39			0,005012700	0,00	0,00		
34	3530	107,92			0,005570500	0,00	0,00		
35	3530	111,45			0,006128400	0,00	0,00		
36	3530	114,98			0,006686200	0,00	0,00		
37	3530	118,51			0,007244100	0,00	0,00		
38	3530	122,04			0,007802000	0,00	0,00		
39	3530	125,57			0,008359800	0,00	0,00		
40	3530	129,1			0,008917700	0,00	0,00		
41	3530	132,63			0,009475600	0,00	0,00		
42	3530	136,16			0,010033400	0,00	0,00		
43	3530	139,69			0,010591300	0,00	0,00		
44	3530	143,22			0,011149200	0,00	0,00		
45	3530	146,75			0,011707000	0,00	0,00		
46	3530	150,28			0,012264900	0,00	0,00		
47	3530	153,81			0,012822700	0,00	0,00		
48	3530	157,34			0,013380600	0,00	0,00		
49	3530	160,87			0,013938500	0,00	0,00		
50	3530	164,4			0,014496300	0,00	0,00		
51	3530	167,93			0,015054200	0,00	0,00		
52	3530	171,46			0,015612100	0,00	0,00		
53	3530	174,99			0,016169900	0,00	0,00		
54	3530	178,52			0,016727800	0,00	0,00		
55	5000	183,52	615,00	183,52	0,017518000	0,00	0,00	28338,90	496,44
56	5000	188,52			0,018308100	0,00	0,00		
57	5000	193,52			0,019098300	0,00	0,00		
58	5000	198,52			0,019888500	0,00	0,00		
59	5000	203,52			0,020678700	0,00	0,00		
60	5000	208,52			0,021468800	0,00	0,00		

Распределение нормальных напряжений и относительных деформаций по высоте сечения составной сборно-монолитной конструкции при разрушающей нагрузке приведено на рис. 10.

Рис. 10. График распределения по высоте сечения элемента (от разрушающей нагрузки $q_0 = 19,5 \text{ кН/м}$): а) – нормальных напряжений; б) – относительных деформаций

Fig. 10. Graph of element section height distribution (from breaking load $q_0 = 19,5 \text{ kN/m}$): a) – normal voltages; b) – relative deformations

Нагружение элемента нагрузкой q_0 осуществлялось от 1 кН/м равномерными шагами по 0,5 кН/м до разрушающей нагрузки, всего было просчитано 38 ступеней нагружения. График прогибов в середине пролета сборно-монолитной плиты на каждой ступени нагружения представлен на рис. 11.

Рис. 11. Прогибы в середине пролета составной плиты перекрытия

Fig. 11. Deflections in the middle of the span of a composite slab

Из графика видно, что нарастание прогибов, почти до разрушающей нагрузки, происходило практически линейно. Затем, при нагрузке $q_0 = 17 \text{ кН/м}$ прогибы стали возрастать нелинейно вплоть до момента разрушения.

Анализируя данные расчета на каждой ступени нагружения можно также построить диаграмму « $M - l/\rho$ » (Момент – Кривизна) (рис. 12).

Рис. 12. Диаграмма зависимости « $M - 1/\rho$ » составной плиты перекрытия
Fig. 12. Compound plate of overlapping dependency diagram « $M - 1/\rho$ »

Распределение нормальных напряжений и относительных деформаций по высоте сечения составной сборно-монолитной плиты перекрытия при нагрузке трещинообразования $q_0 = 4,1 \text{ кН/м}$ приведено на рис. 13.

Рис. 13. График распределения по высоте сечения плиты перекрытия (от нагрузки трещинообразования $q_0 = 3,5 \text{ кН/м}$): а) – нормальных напряжений; б) – относительных деформаций
Fig. 13. Diagram of distribution along the height of the floor slab section (from the crack formation load $q_0 = 3,5 \text{ кН/м}$): а) – normal voltages; б) – relative deformations

Из рис. 13 (а) видно, что трещины образовались и в нижнем – сборном, и в верхнем – монолитном брусьях одновременно, при этом момент трещинообразования $M_{cr} = 13,5 \text{ кНм}$.

Выводы

Представленная в работе методика определения параметров напряженно-деформированного состояния НДС при структурном анализе составного железобетонного сборно-монолитного стержня с использованием вариационных принципов на основе метода Власова-Милейковского в форме перемещений, в сочетании с шагово-итерационным способом расчета, позволяет усовершенствовать принятый в строительной механике расчетно-аналитический аппарат инструментом практического учета податливости шва сдвига сборного и монолитного слоя, учитывать фактическую податливость контактного шва сдвига, а также физическую нелинейность характеристик материалов при расчете сборно-монолитных конструкций и осуществлять их рациональное проектирование.

Литература

1. Милейковский И.Е., Трушин С.И. Расчет тонкостенных конструкций. М.: Стройиздат, 1989. 200 с.
2. Колчунов В.И., Панченко Л.И. Расчет составных тонкостенных конструкций. М.: Изд-во АСВ, 1999. 281 с.
3. Байдин О.В., Шевченко А.В., Шаповалов С.М. Экспериментальное исследование трещиностойкости стержневых сборно-монолитных конструкций // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2009. №2. С. 78 – 83.
4. Байдин О.В., Шевченко А.В., Шаповалов С.М. Расчет сборно-монолитных конструкций с применением вариационного метода и интегрального модуля деформации // Строительная механика и расчет сооружений. 2009. №4. С. 9 – 13.
5. Байдин О.В., Шевченко А.В., Шаповалов С.М. Учет температурных деформаций при расчете замкнутых цилиндрических оболочек вариационным методом // Строительная механика и расчет сооружений. 2009. №5. С. 6 – 9.
6. Юрьев А.Г., Панченко Л.А., Серых И.Р., Рубанов В.Г. Тонкостенные конструкции тоннелей мелкого заложения // Промышленное и гражданское строительство. 2014. №8. С. 27 – 29.
7. Никулин А.И. К уточнению величин предельных относительных деформаций бетона в сжатой зоне изгибаемых железобетонных элементов // Промышленное и гражданское строительство. 2014. №8. С. 12 – 15.
8. Колчунов В.И., Скобелева Е.А., Коржавых А.И. К расчету деформативности железобетонных рам с элементами составного сечения // Academia. Архитектура и строительство. 2009. №4. С. 74 – 78.
9. Меркулов Д.С. Прочность составных железобетонных элементов при сложном напряженном состоянии // Известия Орловского государственного технического университета. Серия: строительство и транспорт. 2007. №4-16. С. 48 – 51.
10. Колчунов В.И., Скобелева Е.А., Горностаев С.И. Экспериментальные исследования деформирования и трещиностойкости составных конструкций // Известия Орловского государственного технического университета. Серия: строительство и транспорт. 2006. №1-2. С. 12 – 16.
11. Koyankin A.A., Mitasov V.M. Stress-strain state of precast and cast-in place buildings // Magazine of Civil Engineering. 2017. N6. P. 175 – 184.
12. Rev Ribeiro R.R.J., Diogenes H.J.F., Nobrega M.V. and C. El. Debs A.L.H. A survey of the mechanical properties of concrete for structural purposes prepared on construction sites // IBRACON Estrut. Mater. [online]. 2016. Vol. 9. №5. P. 722 – 744.
13. Abdulsamee H. Study the Behavior of Reinforced Concrete Beam Using Finite Element Analysis. Proceedings of the 3rd World Congress on Civil, Structural, and Environmental Engineering (CSEE'18) Budapest, Hungary. April 8-10, 2018.
14. Sneideris A., Marciukaitis G. Strain-stress analysis of reinforced concrete beams strengthened without unloading by exterior reinforcement. Application of Codes, Design and Regulations. January 200. P. 685– 692.
15. Wellison J. Reliability analysis of reinforced concrete beams using finite element models. Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering / O. Faria, R.H. Lopez, L.F.F. Miguel, W.J.S. Gomes, M. Noronha (Editores), ABMEC, Florianópolis, SC, Brazil, November 5-8, 2017.

References

1. Milejkovskij I.E., Trushin S.I. Raschet tonkostennykh konstrukcij. M.: Strojizdat, 1989. 200 p. (rus.)
2. Kolchunov V.I., Panchenko L.I. Raschet sostavnykh tonkostennykh konstrukcij. M.: Izd-vo ASV, 1999. 281 p. (rus.)
3. Bajdin O.V., SHEvchenko A.V., SHapovalov S.M. Eksperimental'noe issledovanie treshchinostojkosti sterzhnevyyh sborno-monolitnykh konstrukcij. Vestnik BGTU im. V.G. SHuhova. 2009. 2. P. 78 – 83. (rus.)
4. Bajdin O.V., SHEvchenko A.V., SHapovalov S.M. Raschet sborno-monolitnykh konstrukcij s primeneniem variacionnogo metoda i integral'nogo modulya deformacii. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 2009. 4. P. 9 – 13. (rus.)
5. Bajdin O.V., SHEvchenko A.V., SHapovalov S.M. Uchet temperaturnykh deformacij pri raschete zamknutykh cilindricheskikh obolochek variacionnym metodom. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 2009. 5. P. 6 – 9. (rus.)
6. Yur'ev A.G., Panchenko L.A., Seryh I.R., Rubanov V.G. Tonkostennyye konstrukcii tonnelej melkogo zalozeniya. Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo. 2014. 8. P. 27 – 29. (rus.)
7. Nikulin A.I. K utochneniyu velichin predel'nykh otnositel'nykh deformacij betona v szhatoy zone izgibaemykh zhelezobetonnykh elementov. Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo. 2014. 8. P. 12 – 15. (rus.)
8. Kolchunov V.I., Skobeleva E.A., Korzhavyh A.I. K raschetu deformativnosti zhelezobetonnykh ram s elementami sostavnogo secheniya. Academia. Arhitektura i stroitel'stvo. 2009. 4. P. 74 – 78. (rus.)
9. Merkulov D.S. Prochnost' sostavnykh zhelezobetonnykh elementov pri slozhnom napryazhennom sostoyanii. Izvestiya Orlovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: stroitel'stvo i transport. 2007. 4-16. P. 48 – 51. (rus.)
10. Kolchunov V.I., Skobeleva E.A., Gornostaev S.I. Eksperimental'nye issledovaniya deformirovaniya i treshchinostojkosti sostavnykh konstrukcij. Izvestiya Orlovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: stroitel'stvo i transport. 2006. 1-2. P. 12 – 16. (rus.)
11. Koyankin A.A., Mitsov V.M. Stress-strain state of precast and cast-in place buildings. Magazine of Civil Engineering. 2017. 6. P. 175 – 184.
12. Rev Ribeiro R.R.J., Diogenes H.J.F., Nobrega M.V. and C. El. Debs A.L.H. A survey of the mechanical properties of concrete for structural purposes prepared on construction sites. IBRACON Estrut. Mater. [online]. 2016. 9 (5). P. 722 – 744.
13. Abdulsamee H. Study the Behavior of Reinforced Concrete Beam Using Finite Element Analysis. Proceedings of the 3rd World Congress on Civil, Structural, and Environmental Engineering (CSEE'18) Budapest, Hungary. April 8-10, 2018.
14. Sneideris A., Marciukaitis G. Strain-stress analysis of reinforced concrete beams strengthened without unloading by exterior reinforcement. Application of Codes, Design and Regulations. January 200. P. 685– 692.
15. Wellison J. Reliability analysis of reinforced concrete beams using finite element models. Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. P.O. Faria, R.H. Lopez, L.F.F. Miguel, W.J.S. Gomes, M. Noronha (Editores), ABMEC, Florianópolis, SC, Brazil, November 5-8, 2017.

**Poloz M.A. *,
Yasser Garib Sami,
Shevchenko A.V., Candidate of Engineering Sciences (Ph.D.), Associate Professor,
Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov, Russia**
*Corresponding author E-mail: max.polo@inbox.ru

APPLICATION OF STEPWISE AND ITERATIVE METHOD IN THE CALCULATION OF BENDING PRESTRESSED PRECAST AND MONOLITHIC ELEMENTS TAKING INTO ACCOUNT PHYSICAL NONLINEARITY

Abstract: precast and monolithic reinforced concrete structures with and without prestressing armature voltages are used as newly designed independent ones, and are the result of work to strengthen existing structures by increasing the cross section. In both cases, the cross-section of such elements is considered as a two-layer, and the resulting composite element operates under load in conditions distributed between the layers of internal forces, the mechanism and the actual value of the distribution of which depends on the physical and mechanical characteristics, the design scheme and the parameters of the contact interaction of the layers. When calculating and designing prestressed reinforced concrete precast and monolithic elements, the shear seam compliance is usually not taken into account, which complicates the analysis of the actual stress-strain state of the structure and contains a certain undisclosed potential for its rational design. One of the possible directions in solving the problem, taking into account the shift of the contact seam, is the use of variational principles of structural mechanics in the calculation of structures such as composite cross-section rods. In the framework of this work, the questions of practical applicability in the structural analysis of composite reinforced concrete precast-monolithic rod of variation principles of structural mechanics based on the method of V.Z. Vlasov – I.E. Mileysky in the form of displacements in combination with the stepwise-iterative method of calculation are considered. The results of numerical calculations by the proposed method are presented, which allows to take into account the specifics of the shear bonds of the precast and monolithic layer, to carry out practical accounting of the seam compliance, as well as to take into account the physical nonlinearity of the characteristics of materials, which allows the rational design of precast monolithic structures.

Keywords: Vlasov-Mileysky variational method, stress-strain condition, composite core, precast-monolithic reinforced concrete, pre-stressing reinforcement, the physical nonlinearity of materials

Для цитирования: Полоз М.А., Яссер Гариб Сами, Шевченко А.В. Применение шагово-итерационного метода при расчете изгибаемых предварительно напряженных сборно-монолитных элементов с учетом физической нелинейности // Строительные материалы и изделия. 2019. Том 2. №3. С. 12 – 27. DOI: 10.34031/2618-7183-2019-2-3-12-27

For citation: Poloz M.A., Yasser Garib Sami, Shevchenko A.V. Application of stepwise and iterative method in the calculation of bending prestressed precast and monolithic elements taking into account the physical nonlinearity. Construction Materials and Products. 2019. 2 (3). P. 12 – 27. DOI: 10.34031/2618-7183-2019-2-3-12-27

Поступила в редакцию 2 февраля 2019 г.
Принята в доработанном виде 25 марта 2019 г.
Одобрена для публикации 3 мая 2019 г.

Received: February 2, 2019.
Revised: March 25, 2019.
Accepted: May 3, 2019.