DOI: 10.34031/2618-7183-2019-2-4-64-72

*Кравчук А.С. *, доктор физико-математических наук, доцент,
филиал Научно-исследовательского политехнического института, Беларусь,
Кравчук А.И., кандидат физико-математических наук, доцент,
Лопатин С.Н.,*

Белорусский государственный университет, Беларусь

**Ответственный автор E-mail: ask_belarus@inbox.ru*

ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛЯМЕ ДЛЯ ТОЛСТОСТЕННОГО В СРЕДНЕМ ИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА ИЗ НЕЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМЫХ МАТЕРИАЛОВ

Аннотация: в силу того, что напряжения и перемещения, как на внутренней, так и на внешней границе цилиндра постоянны, то и их средние значения по участку границы любой площади постоянны и равны исходным значениям. Используя это свойство постановки краевых условий, впервые решена краевая задача для нелинейно деформируемого твердого композиционного тела без использования нелокальных гипотез о малости объема композиционного материала по углу, для которого устанавливаются эффективные характеристики. Однако используется предположение малости представительного элемента композиционного материала в радиальном направлении по отношению к толщине трубы. Установлено, что в случае композитного материала нет возможности отдельно рассматривать плоское напряженное состояние и плоскую деформацию поперечного сечения трубы, и оба этих состояния будут участвовать в оценке напряженно-деформированного состояния изучаемого объекта согласно стандартным гипотезам Фойгта и Рейсса. С методической точки зрения для задачи Ляме для трубы показано, что решения, построенные с использованием гипотез Фойгта и Рейсса, самодостаточны. Установлено, что можно построить эффективную нелинейную диаграмму деформирования композиционного материала цилиндра как линейную комбинацию нелинейных диаграмм отдельных компонент с весами в виде концентраций. Можно получить формулы, определяющие напряженно-деформированное состояние композиционной в среднем изотропной плоскости с отверстием.

Ключевые слова: композиционный структурно неоднородный материал, дискретная случайная величина, усреднение, эффективные деформационные характеристики, гипотеза Фойгта, гипотеза Рейсса, приближение Кравчука-Тарасюка

Введение

Достижения в области технологии производства легких и коррозионно-стойких трубопроводов из высокопрочных полимерных композитов в значительной степени связаны с разработкой методов прогнозирования оптимального наполнения полимерной матрицы армирующими волокнами или частицами [1].

Данной тематике посвящен ряд научно исследовательских работ, которые в большинстве своем являются экспериментальными. Следует отметить также, что все теоретические результаты, полученные до настоящего времени касаются исключительно упругой модели деформирования материала труб [1], что для полимерных материалов является довольно грубым упрощением.

Методы и материалы

В данной работе впервые получены эффективные параметры нелинейно деформируемого композиционного в среднем изотропного материала. Эти результаты применены при анализе напряженного состояния толстостенной трубы в предположении, что репрезентативный элемент композиционного материала существенно меньше внутреннего радиуса трубы.

Результаты и обсуждения

Рассмотрим толстостенную трубу, находящуюся под действием равномерно распределенного давления или перемещения на внутренней и внешней границах. В этом случае пространственная задача сводится к постановке и решению плоской для кольца. Центр кольца одновременно является центром полярной системы координат, которая является рабочей. Очевидно, что как и в упругом случае напряженное состояние не зависит от угла θ в полярной системе координат (r, θ) . Внутренний радиус трубы R , а внешний R_1 (рис. 1).

Предполагается, что композиционный материал трубы состоит из n компонент, k -ый компонента которого ($k = \overline{1, n}$) имеет различные нелинейные функции $\varphi_k(\cdot)$ и модули объемной деформации K_k . Относительная объемная доля каждого материала

$$\gamma_k \quad (0 < \gamma_k < 1, \sum_{k=1}^n \gamma_k = 1).$$

Рис. 1. Толстостенная труба
Fig. 1. Thick pipe

Результаты и обсуждения

Уравнения неразрывности деформаций для однородного материала. В полярной системе координат уравнения неразрывности деформаций имеют вид ([2], стр. 90):

$$\varepsilon_{rr} = r \cdot \frac{d\varepsilon_{\theta\theta}}{dr} + \varepsilon_{\theta\theta}. \quad (1)$$

Уравнение равновесия в физически нелинейно деформируемом цилиндре для однородного материала. В полярной системе координат уравнения равновесия имеют вид ([2], стр. 89):

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0. \quad (2)$$

Уравнения состояния физически нелинейного изотропного материала. Методически переход к плоским задачам осуществляется исходя из трехмерных уравнений состояния. Поэтому прежде чем рассматривать уравнения в полярной системе координат рассмотрим уравнения состояния в цилиндрической системе (r, θ, z) [3, стр. 233, 406]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} - \sigma &= 2 \cdot \varphi(\varepsilon_{in}) \cdot \left(\varepsilon_{rr} - \frac{\Theta}{3} \right), & \sigma_{\theta\theta} - \sigma &= 2 \cdot \varphi(\varepsilon_{in}) \cdot \left(\varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\Theta}{3} \right), \\ \sigma_{zz} - \sigma &= 2 \cdot \varphi(\varepsilon_{in}) \cdot \left(\varepsilon_{zz} - \frac{\Theta}{3} \right), \\ \sigma_{r\theta} &= \varphi(\varepsilon_{in}) \cdot \varepsilon_{r\theta}, & \sigma_{z\theta} &= \varphi(\varepsilon_{in}) \cdot \varepsilon_{z\theta}, & \sigma_{rz} &= \varphi(\varepsilon_{in}) \cdot \varepsilon_{rz}, \\ \sigma &= K \cdot \Theta, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\varepsilon_{in} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta})^2 + (\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{rr})^2 + 6 \cdot (\varepsilon_{r\theta}^2 + \varepsilon_{rz}^2 + \varepsilon_{z\theta}^2)},$$

$$\Theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}, \quad \sigma = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}}{3},$$

K – модуль объемной деформации. Функция $\varphi(\cdot) = \frac{1}{3} \frac{\sigma_{in}}{\varepsilon_{in}}$ может иметь в качестве формального параметра как ε_{in} так и σ_{in} , т.к. $\sigma_{in} = \Phi(\varepsilon_{in})$, где $\Phi(\cdot)$ – некоторая строго возрастающая нелинейная функция.

Таким образом, $\varphi(\varepsilon_{in}) = \frac{1}{3} \frac{\Phi(\varepsilon_{in})}{\varepsilon_{in}}$, а $\varphi(\sigma_{in}) = \frac{1}{3} \frac{\sigma_{in}}{\Phi^{-1}(\sigma_{in})}$.

Гипотеза об однородности деформаций сечения цилиндра. В данном разделе проведем первый этап решения поставленной задачи, заключающийся в использовании гипотезы Фойгта о том, что при простейшем нагружении в материале имеет место однородная деформация, т.е. для любого k -ого материала ($k = \overline{1, n}$) [4]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr,k} &= \varepsilon_{rr}, & \varepsilon_{\theta\theta,k} &= \varepsilon_{\theta\theta}, & \varepsilon_{zz,k} &= \varepsilon_{zz}, \\ \varepsilon_{r\theta,k} &= \varepsilon_{r\theta}, & \varepsilon_{rz,k} &= \varepsilon_{rz}, & \varepsilon_{r\theta,k} &= \varepsilon_{r\theta}. \end{aligned} \quad \text{C} \quad (4)$$

Получаем из (3):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,k} - \sigma_k &= 2 \cdot \varphi_k(\varepsilon_{in}) \cdot \left(\varepsilon_{rr} - \frac{\Theta}{3} \right), & \sigma_{\theta\theta,k} - \sigma_k &= 2 \cdot \varphi_k(\varepsilon_{in}) \cdot \left(\varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\Theta}{3} \right), \\ \sigma_{zz,k} - \sigma_k &= 2 \cdot \varphi_k(\varepsilon_{in}) \cdot \left(\varepsilon_{zz} - \frac{\Theta}{3} \right), \\ \sigma_{r\theta,k} &= \varphi_k(\varepsilon_{in}) \cdot \varepsilon_{r\theta}, & \sigma_{z\theta,k} &= \varphi_k(\varepsilon_{in}) \cdot \varepsilon_{z\theta}, & \sigma_{rz,k} &= \varphi_k(\varepsilon_{in}) \cdot \varepsilon_{rz}, \\ \sigma_k &= K_k \cdot \Theta, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\sigma_k = \frac{\sigma_{rr,k} + \sigma_{\theta\theta,k} + \sigma_{zz,k}}{3}.$$

Для любого материала с номером k получаем из (3):

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{rr} \rangle_V - \langle \sigma \rangle_V &= 2 \cdot \langle \varphi(\varepsilon_{in}) \rangle_V \cdot \left(\varepsilon_{rr} - \frac{\Theta}{3} \right), \\ \langle \sigma_{\theta\theta} \rangle_V - \langle \sigma \rangle_V &= 2 \cdot \langle \varphi(\varepsilon_{in}) \rangle_V \cdot \left(\varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\Theta}{3} \right), \\ \langle \sigma_{zz} \rangle_V - \langle \sigma \rangle_V &= 2 \cdot \langle \varphi(\varepsilon_{in}) \rangle_V \cdot \left(\varepsilon_{zz} - \frac{\Theta}{3} \right), \\ \langle \sigma_{r\theta} \rangle_V &= \langle \varphi(\varepsilon_{in}) \rangle_V \cdot \varepsilon_{r\theta}, & \langle \sigma_{z\theta} \rangle_V &= \langle \varphi(\varepsilon_{in}) \rangle_V \cdot \varepsilon_{z\theta}, \\ \langle \sigma_{rz} \rangle_V &= \langle \varphi(\varepsilon_{in}) \rangle_V \cdot \varepsilon_{rz}, \\ \langle \sigma \rangle_V &= \langle K \rangle_V \cdot \Theta, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{rr} \rangle_V &= \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \sigma_{rr,k}, & \langle \sigma_{\theta\theta} \rangle_V &= \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \sigma_{\theta\theta,k}, & \langle \sigma_{zz} \rangle_V &= \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \sigma_{zz,k}, \\ \langle \sigma \rangle &= \frac{\langle \sigma_{rr} \rangle_V + \langle \sigma_{\theta\theta} \rangle_V + \langle \sigma_{zz} \rangle_V}{3}, \\ \langle \varphi(\varepsilon_{in}) \rangle_V &= \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \varphi_k(\varepsilon_{in}), & \langle K \rangle_V &= \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot K_k. \end{aligned}$$

Отметим, что согласно гипотезе Фойгта:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \langle \varepsilon_{rr} \rangle_V, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \langle \varepsilon_{\theta\theta} \rangle_V, & \varepsilon_{zz} &= \langle \varepsilon_{zz} \rangle_V, \\ \varepsilon_{r\theta} &= \langle \varepsilon_{r\theta} \rangle_V, & \varepsilon_{rz} &= \langle \varepsilon_{rz} \rangle_V, & \varepsilon_{r\theta} &= \langle \varepsilon_{r\theta} \rangle_V. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\varepsilon_{in} = \langle \varepsilon_{in} \rangle_V$ и $\Phi_k(\varepsilon_{in}) = 3 \cdot \varphi_k(\varepsilon_{in}) \cdot \varepsilon_{in}$. Соответственно будет предполагать, что выполнено равенство:

$$\langle \sigma_{in} \rangle_V \approx \langle \Phi(\langle \varepsilon_{in} \rangle_V) \rangle_V = 3 \cdot \langle \varphi(\langle \varepsilon_{in} \rangle_V) \rangle_V \cdot \langle \varepsilon_{in} \rangle_V. \quad (7)$$

Гипотеза об однородности напряжений. В данном разделе проведем второй этап решения поставленной задачи, заключающийся в использовании гипотезы Рейсса о том, что при простейшем нагружении в материале имеет место однородное напряженное состояние, т.е. для любого k -ого слоя ($k = \overline{1, n}$) [4]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,k} &= \sigma_{rr}, \quad \sigma_{\theta\theta,k} = \sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma_{zz,k} = \sigma_{zz}, \\ \sigma_{r\theta,k} &= \sigma_{r\theta}, \quad \sigma_{rz,k} = \sigma_{rz}, \quad \sigma_{r\theta,k} = \sigma_{r\theta}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для любого материала с номером k получаем из (3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi_k(\sigma_{in})}(\sigma_{rr} - \sigma) &= 2 \cdot \left(\varepsilon_{rr,k} - \frac{\Theta_k}{3} \right), \quad \frac{1}{\varphi_k(\sigma_{in})}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma) = 2 \cdot \left(\varepsilon_{\theta\theta,k} - \frac{\Theta_k}{3} \right), \\ \frac{1}{\varphi_k(\sigma_{in})}(\sigma_{zz} - \sigma) &= 2 \cdot \left(\varepsilon_{zz,k} - \frac{\Theta_k}{3} \right), \\ \frac{\sigma_{r\theta}}{\varphi_k(\sigma_{in})} &= \varepsilon_{r\theta,k}, \quad \frac{\sigma_{z\theta}}{\varphi_k(\sigma_{in})} = \varepsilon_{z\theta,k}, \quad \frac{\sigma_{rz}}{\varphi_k(\sigma_{in})} = \varepsilon_{rz,k}, \quad \frac{\sigma}{K_k} = \Theta_k, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\Theta_k = \varepsilon_{rr,k} + \varepsilon_{\theta\theta,k} + \varepsilon_{zz,k}.$$

Домножая (9) на γ_k и суммируя по k получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle \varphi(\sigma_{in}) \rangle_R}(\sigma_{rr} - \sigma) &= 2 \cdot \left(\langle \varepsilon_{rr} \rangle_R - \frac{\langle \Theta \rangle_R}{3} \right), \\ \frac{1}{\langle \varphi(\sigma_{in}) \rangle_R}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma) &= 2 \cdot \left(\langle \varepsilon_{\theta\theta} \rangle_R - \frac{\langle \Theta \rangle_R}{3} \right), \\ \frac{1}{\langle \varphi(\sigma_{in}) \rangle_R}(\sigma_{zz} - \sigma) &= 2 \cdot \left(\langle \varepsilon_{zz} \rangle_R - \frac{\langle \Theta \rangle_R}{3} \right), \\ \frac{\sigma_{r\theta}}{\langle \varphi(\sigma_{in}) \rangle_R} &= \varepsilon_{r\theta,k}, \quad \frac{\sigma_{z\theta}}{\langle \varphi(\sigma_{in}) \rangle_R} = \varepsilon_{z\theta,k}, \quad \frac{\sigma_{rz}}{\langle \varphi(\sigma_{in}) \rangle_R} = \varepsilon_{rz,k}, \quad \frac{\sigma}{\langle K \rangle_R} = \langle \Theta \rangle_R, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{rr} \rangle_R &= \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \varepsilon_{rr,k}, \quad \langle \varepsilon_{\theta\theta} \rangle_R = \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \varepsilon_{\theta\theta,k}, \quad \langle \varepsilon_{zz} \rangle_R = \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \varepsilon_{zz,k}, \\ \langle \Theta \rangle_R &= \langle \varepsilon_{rr} \rangle_R + \langle \varepsilon_{\theta\theta} \rangle_R + \langle \varepsilon_{zz} \rangle_R, \\ \langle \varphi(\sigma_{in}) \rangle_R &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{\varphi_k(\sigma_u)} \right)^{-1}, \quad \langle K \rangle_R = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{K_k} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Отметим, что согласно гипотезе Рейсса выполнены равенства:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \langle \sigma_{rr} \rangle_R, \quad \sigma_{\theta\theta} = \langle \sigma_{\theta\theta} \rangle_R, \quad \sigma_{zz} = \langle \sigma_{zz} \rangle_R, \\ \sigma_{r\theta} &= \langle \sigma_{r\theta} \rangle_R, \quad \sigma_{rz} = \langle \sigma_{rz} \rangle_R, \quad \sigma_{r\theta} = \langle \sigma_{r\theta} \rangle_R. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\sigma_{in} = \langle \sigma_{in} \rangle_R \text{ и } \frac{1}{\varphi_k(\sigma_{in})} = 3 \frac{\Phi_k^{-1}(\sigma_{in})}{\sigma_{in}},$$

тогда

$$\frac{1}{\langle \varphi(\sigma_{in}) \rangle_R} = \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{\varphi_k(\sigma_{in})} = \frac{3}{\sigma_{in}} \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \Phi_k^{-1}(\sigma_{in})$$

соответственно будет выполнено равенство:

$$\langle \varepsilon_{in} \rangle_R \approx \frac{\langle \sigma_{in} \rangle_R}{3 \cdot \langle \varphi(\langle \sigma_{in} \rangle_R) \rangle_R} = \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \Phi_k^{-1}(\langle \sigma_{in} \rangle_R) = \langle \Phi^{-1}(\langle \sigma_{in} \rangle_R) \rangle_R. \quad (11)$$

Вид нелинейной функции $\varphi_k(\cdot)$ используемы при решении задачи. Для упрощения численного решения задачи будем предполагать, что для каждого материала с номером k ($k = 1, n$) выполнено (рис. 2):

$$\varphi_{k,j}(\varepsilon_{in}) = \frac{1}{3} \frac{\sigma_{in,k,j}}{\varepsilon_{in}} = \frac{G_{k,j} \cdot \varepsilon_{in}}{\varepsilon_{in}} = G_{k,j},$$

$$\varphi_{k,j}(\sigma_{in}) = \frac{1}{3} \frac{\sigma_{in,k,j}}{G_{k,j}^{-1} \cdot \sigma_{in,k,j}} = G_{k,j}.$$

где $j = \overline{1, m}$, $\varepsilon_{in} \in [\varepsilon_{in,j}, \varepsilon_{in,j+1}]$, $G_{k,1}$ – модуль сдвига k -го материала.

Рис. 2. Ступенчатая аппроксимация нелинейной диаграммы связи интенсивности деформаций $(\varepsilon_{in,j}, \varepsilon_{in,j+1})$ и интенсивности напряжений $(\sigma_{in,j}, \sigma_{in,j+1})$

Fig. 2. Step approximation of a nonlinear diagram of the relationship between strain intensity $(\varepsilon_{in,j}, \varepsilon_{in,j+1})$ and stress intensity $(\sigma_{in,j}, \sigma_{in,j+1})$

Соответственно для (7) и (11) можно записать:

$$\langle \sigma_{in} \rangle_{V,j} \approx \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot G_{k,j} \cdot \langle \varepsilon_{in} \rangle_V = \langle G_j \rangle_V \cdot \langle \varepsilon_{in} \rangle_V, \quad (12)$$

$$\langle \varepsilon_{in} \rangle_{R,j} \approx \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{G_{k,j}} \cdot \langle \sigma_{in} \rangle_R = \frac{\langle \sigma_{in} \rangle_R}{\langle G_j \rangle_R}.$$

Вилка Кравчука-Тарасюка при оценке нелинейных свойств композиционного материала трубы. Исходя из пары уравнений (6) и (10) предполагая последовательно, что эффективные деформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ определяются выражением [4]:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = (1 - \alpha) \cdot \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V + \alpha \cdot \langle \varepsilon_{ij} \rangle_R \text{ при этом } \langle \sigma_{ij} \rangle_V = \langle \sigma_{ij} \rangle_R, \quad (13)$$

где α – вещественная константа, удовлетворяющая неравенству $0 < \alpha < 1$, а затем эффективные напряжения выражаются аналогично [4]:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = (1 - \alpha) \cdot \langle \sigma_{ij} \rangle_V + \alpha \cdot \langle \sigma_{ij} \rangle_R \text{ при этом } \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V = \langle \varepsilon_{ij} \rangle_R. \quad (14)$$

В качестве вилки оценивающей разброс механических значений композиционного материала можно получить выражения [4]:

$$(1 - \alpha) \cdot \langle \varphi(\varepsilon_u) \rangle_V + \alpha \cdot \langle \varphi(\sigma_u) \rangle_R = (1 - \alpha) \cdot \langle G_j \rangle_V + \alpha \cdot \langle G_j \rangle_R, \quad (15)$$

$$\left((1 - \alpha) \cdot \langle G_j \rangle_V^{-1} + \alpha \cdot \langle G_j \rangle_R^{-1} \right)^{-1},$$

где $j = \overline{1, m}$, $\varepsilon_{in} \in [\varepsilon_{in, j}, \varepsilon_{in, j+1}]$ интегрируя (15) по α получается вилка Кравчука-Тарасюка [4] (рис. 3):

$$\overline{\langle \varphi_j \rangle}_{K-T} = \frac{1}{2} \left(\langle G_j \rangle_V + \langle G_j \rangle_R \right),$$

$$\langle \varphi_j \rangle_{K-T} = \frac{\langle G_j \rangle_V \cdot \langle G_j \rangle_R}{\langle G_j \rangle_R - \langle G_j \rangle_V} \ln \left(\frac{\langle G_j \rangle_R}{\langle G_j \rangle_V} \right),$$

где $\overline{\langle \varphi_j \rangle}_{K-T}$, $\langle \varphi_j \rangle_{K-T}$ – нижняя и верхняя граница вилки Кравчука-Тарасюка соответственно. Тогда в качестве оценки эффективных механических свойств нелинейно деформируемого материала можно взять выражение (рис. 3):

$$\langle \varphi_j \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\langle G_j \rangle_V + \langle G_j \rangle_R \right) + \frac{\langle G_j \rangle_V \cdot \langle G_j \rangle_R}{\langle G_j \rangle_R - \langle G_j \rangle_V} \ln \left(\frac{\langle G_j \rangle_R}{\langle G_j \rangle_V} \right) \right). \quad (16)$$

Рис. 3. Вилка Рейсса-Фойгта и Кравчука-Тарасюка оценки эффективной нелинейной диаграммы деформирования композиционного материала из двух компонент, объемные доли которых составляют $\gamma_1 = 0.3$ и $\gamma_2 = 0.7$ соответственно: 1 – диаграмма деформирования первой компоненты композиционного материала, 2 – диаграмма деформирования второй компоненты композиционного материала, 3 – эффективная диаграммы деформирования композиционного материала по Фойгту, 4 – эффективной диаграммы деформирования композиционного материала по Рейссу, 5 – верхняя граница эффективной диаграммы деформирования композиционного материала по Кравчуку-Тарасюку, 6 – нижняя граница

эффективной диаграммы деформирования композиционного материала по Кравчуку-Тарасюку

Fig. 3. Reiss-Voigt and Kravchuk-Tarasjuk fork for evaluating the effective nonlinear strain diagram of a composite material of two components whose volume fractions are $\gamma_1 = 0.3$ and $\gamma_2 = 0.7$ respectively: 1 - deformation diagram of the first component of the composite material, 2 - deformation diagram of the second component of the composite material, 3 - effective diagram of the deformation of the composite material according to Voigt, 4 - the effective diagram of the deformation of the composite material according to Reiss, 5 - the upper boundary of the effective diagram of the deformation of the composite material according to Kravchuk-Tarasjuk, 6 - lower boundary of the effective diagram of deformation of composite material according to Kravchuk-Tarasjuk

Однако необходимо проверить полученное равенство (16) исходя из (12). Будем предполагать по очереди, что эффективные интенсивности деформаций и напряжений имеют вид:

$$\langle \varepsilon_{in} \rangle = (1 - \alpha) \cdot \langle \varepsilon_{in} \rangle_V + \alpha \cdot \langle \varepsilon_{in} \rangle_{R,j},$$

при этом

$$\langle \sigma_{in} \rangle_{V,j} = \langle \sigma_{in} \rangle_R,$$

и

$$\langle \sigma_{in} \rangle = (1 - \alpha) \cdot \langle \sigma_{in} \rangle_{V,j} + \alpha \cdot \langle \sigma_{in} \rangle_R,$$

при этом

$$\langle \varepsilon_{in} \rangle_V = \langle \varepsilon_{in} \rangle_{R,j}$$

где

$$j = \overline{1, m}, \varepsilon_{in} \in [\varepsilon_{in,j}, \varepsilon_{in,j+1}].$$

Тогда используя (12) в качестве вилки оценивающей разброс механических значений композиционного материала можно получить выражения [4]:

$$(1 - \alpha) \cdot \langle G_j \rangle_V + \alpha \cdot \langle G_j \rangle_R, \\ \left((1 - \alpha) \cdot \langle G_j \rangle_V^{-1} + \alpha \cdot \langle G_j \rangle_R^{-1} \right)^{-1},$$

которые полностью совпадают с (14) и подтверждают правильность вычисления эффективной нелинейной характеристики $\langle \varphi_j \rangle$ с помощью (15).

Соответственно для модуля объемной деформации получаем эффективное значение в виде [4] (рис. 4):

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (\langle K \rangle_V + \langle K \rangle_R) + \frac{\langle K \rangle_V \cdot \langle K \rangle_R}{\langle K \rangle_R - \langle K \rangle_V} \ln \left(\frac{\langle K \rangle_R}{\langle K \rangle_V} \right) \right). \quad (17)$$

Рис. 4. Вилка Рейсса- Фойгта и Кравчука-Тарасюка оценки эффективного модуля объемной деформации композиционного материала: 1 – оценка эффективного модуля объемной деформации композиционного материала по Фойгту, 2 – верхняя граница эффективного модуля объемной деформации композиционного материала по Кравчуку-Тарасюку, 3 – нижняя граница эффективного модуля объемной деформации композиционного материала по Кравчуку-Тарасюку, 4 – оценка эффективного модуля объемной деформации композиционного материала по Рейссу

Fig. 4. Reiss-Voigt and Kravchuk-Tarasyuk fork for evaluating the effective bulk modulus of composite material according to Voigt, 1 - Evaluation of the effective bulk modulus of composite material according to Voigt, 2 - upper boundary of the effective bulk modulus of composite material according to Kravchuk-Tarasyuk, 3 - lower boundary of the effective bulk modulus deformations composite material according to Kravchuk-Tarasyuk, 4 - assessment of the effective bulk strain modulus of composite material according to Reiss

Решение нелинейного уравнения с использованием эффективных механических характеристик композиционного материала (16) и (17). Для того чтобы применить предыдущие исследования при решении задачи для трубы необходимо сделать замечание общего характера, которое касается размеров представительного элемента композиционного материала. А именно очевидно предполагается, что размеры репрезентативного элемента малы по сравнению с радиусом внутренней границы трубы [5].

Ранее установлено [6], что деформации трубы можно взять в виде:

$$\varepsilon_{rr} = C_0 \cdot \frac{R^2}{2 \cdot r^2} + C, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = -C_0 \frac{R^2}{2 \cdot r^2} + C,$$

где C_0 и C некоторые вещественные константы, переопределяемые из краевых условий, обычно налагаемых на пару $u_r|_{r=R}$ и $u_r|_{r=R_1}$ (где u_r – радиальное перемещение границы трубы) или пару $\sigma_{rr}|_{r=R}$ и $\sigma_{rr}|_{r=R_1}$. Очевидно, как и в упругом случае, при рассмотрении плоскости с отверстием константа C обращается в нуль.

Кроме того для плоской деформации нормальное радиальное напряжение при $r \in [R, R_1]$ приобретает вид:

$$\langle \sigma_{rr} \rangle_j = \frac{2}{3} \cdot \langle \varphi_j \rangle \cdot \left(3 \cdot C_0 \cdot \frac{R^2}{2 \cdot r^2} + C \right) + 2 \cdot \langle K \rangle \cdot C, \quad (18)$$

где

$$\varepsilon_{ii,j} \leq \varepsilon_{ii} < \varepsilon_{ii,j+1} \quad (j = \overline{1, m}), \quad \varepsilon_{ii} = \frac{1}{3} \sqrt{3 \cdot C_0 \frac{R^4}{r^4} + 4 \cdot C^2}.$$

Выводы

Используя это особенности постановки краевых условий для цилиндра, впервые решена краевая задача для нелинейно деформируемого твердого композиционного тела без использования нелокальных гипотез о малости объема композиционного материала по углу, для которого устанавливаются эффективные характеристик. Однако используется предположение о малости представительного элемента композиционного материала в радиальном направлении по отношению к толщине трубы.

Установлено, что в случае композитного материала нет возможности отдельно рассматривать плоское напряженное состояние и плоскую деформацию поперечного сечения трубы, и оба этих состояния будут участвовать в оценке напряженно-деформированного состояния изучаемого объекта согласно стандартным гипотезам Фойгта и Рейсса.

С методической точки зрения для задачи Ляме для трубы показано, что решения, построенные с использованием гипотез Фойгта и Рейсса, самодостаточны.

Установлено, что можно построить эффективную нелинейную диаграмму деформирования композиционного материала цилиндра как линейную комбинацию нелинейных диаграмм отдельных компонент с весами в виде концентраций.

Литература

1. Можаровский В.В., Марьин С.А., Марьина Н.А., Шилько С.В. и др. Расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния цилиндрических труб с учетом неоднородности материала // Проблемы физики, математики и техники. 2009. №1 (1). С. 78 – 83.
2. Жемочкин Б.Н. Теория упругости. М.: Госстормиздат, 1957. 256 с.
3. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности. Минск: БГУ, 2011. 543 с.
4. Тарасюк И.А., Кравчук А.С. Сужение «вилки» Фойгта-Рейсса в теории упругих структурно неоднородных в среднем изотропных композиционных тел без применения вариационных принципов [Электронный ресурс] // APRIORI. Сер.: Естественные и технические науки. 2014. №3. URL: <http://apriorijournal.ru/seria2/3-2014/Tarasjuk-Kravchuk.pdf> (дата обращения: 05.04.2018)

5. Кравчук А.С., Чигарев А.В. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами. Мн.: Технопринт, 2000. 196 с.
6. Кравчук А.С., Кравчук А.И., Лопатин С.Н. Решение физически нелинейной задачи Ляме для толстостенного цилиндра // Наука и бизнес: пути развития. 2018. №5 (83). С. 11 – 16.

References

1. Mozharovskij V.V., Mar'in C.A., Mar'ina N.A., SHil'ko S.V. i dr. Raschetno-eksperimental'noe issledovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya cilindricheskikh trub s uchetom neodnorodnosti materiala. Problemy fiziki, matematiki i tekhniki. 2009. 1 (1). P. 78 – 83. (rus.)
2. ZHemochkin B.N. Teoriya uprugosti. M.: Gosstorozizdat, 1957. 256 p. (rus.)
3. ZHuravkov M.A., Starovojtov E.I. Mekhanika sploshnyh sred. Teoriya uprugosti i plastichnosti. Minsk: BGU, 2011. 543 p. (rus.)
4. Tarasyuk I.A., Kravchuk A.S. Suzhenie «vilki» Fojgta-Rejssa v teorii uprugih strukturno neodnorodnyh v srednem izotropnyh kompozicionnyh tel bez primeneniya variacionnyh principov [Elektronnyj resurs]. APRIORI. Ser.: Estestvennye i tekhnicheskie nauki. 2014. №3. URL: <http://apriorijournal.ru/seria2/3-2014/Tarasyuk-Kravchuk.pdf> (data obrashcheniya: 05.04.2018) (rus.)
5. Kravchuk A.S., CHigarev A.V. Mekhanika kontaktnogo vzaimodejstviya tel s krugovymi granicami. Mн.: Tekhnoprint, 2000. 196 p. (rus.)
6. Kravchuk A.S., Kravchuk A.I., Lopatin S.N. Reshenie fizicheski nelinejnoj zadachi Lyame dlya tolstosten-nogo cilindra. Nauka i biznes: puti razvitiya. 2018. 5 (83). P. 11 – 16. (rus.)

*Kravchuk A.S. *, Doctor of Physical and Mathematical Sciences (Advanced Doctor), Associate Professor, Research Polytechnic Institute (branch), Belarus,*

Kravchuk A.I., Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Ph.D.), Associate Professor,

Lopatin S.N., Master Student,

Belarusian State University, Belarus

*Corresponding author E-mail: ask_belarus@inbox.ru

COMPLETE SOLUTION OF LAME PROBLEM FOR A THICK-WALLED COMPOSITE NONLINEARLY DEFORMABLE CYLINDER

Abstract: the paper deals with the boundary value problem for the nonlinearly deformable composite cylinder with different types of boundary conditions. The stresses and displacements on both boundaries of the cylinder are constant, so their boundary average values for any area are constant and equal to the initial values. It should be noticed, that the solution of the boundary value problem is obtained without using nonlocal hypotheses about the composite material volume smallness by the angle for which the effective characteristics are calculated. In addition, the assumption of the composite material element smallness in the radial direction with respect to the thickness of the cylinder is used. It is established, that there is no possibility to consider plane stress state and plane strain of the cylinder separately from each other. Both of these states should be studied for analysis of stress-strain state according to Voigt and Reuss hypotheses. It is also shown that the solution of the Lamé problem for a cylinder, which is derived, based on Voigt and Reuss hypotheses, is self-sufficient. Formulas, which describe stress-strain state of the composite cylinder, are derived based on this approximation.

Keywords: inhomogeneous composite material, discrete random variable, effective deformation characteristics, Voigt hypothesis, Reuss hypothesis, Kravchuk-Tarasyuk approximation

Для цитирования: Кравчук А.С., Кравчук А.И., Лопатин С.Н. Полное решение задачи Ляме для толстостенного в среднем изотропного цилиндра из нелинейно деформируемых материалов // Строительные материалы и изделия. 2019. Том 2. №4. С. 64 – 72. DOI: 10.34031/2618-7183-2019-2-4-64-72

For citation: Kravchuk A.S., Kravchuk A.I., Lopatin S.N. Complete solution of lame problem for a thick-walled composite nonlinearly deformable cylinder. Construction Materials and Products. 2019. 2 (4). P. 64 – 72. DOI: 10.34031/2618-7183-2019-2-4-64-72

Поступила в редакцию 25 мая 2019 г.

Принята в доработанном виде 20 июня 2019 г.

Одобрена для публикации 22 июля 2019 г.

Received: May 25, 2019.

Revised: June 20, 2019.

Accepted: July 22, 2019.