DOI: 10.34031/2618-7183-2020-3-1-76-82

Языев С.Б. *, кандидат технических наук, доцент,
Донской государственный технический университет, Россия

*Ответственный автор E-mail: ps62@yandex.ru

МЕТОД ЭНЕРГИИ В РАСЧЕТЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА КОНСОЛЬНОЙ ПОЛОСЫ С УЧЕТОМ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

Аннотация: задача об изгибе полосы силой, приложенной на конце, не представляет особого практического значения. Такой способ нагрузки и закрепления концов интересен лишь потому, что его удобнее всего осуществить на опыте, который дает возможность проверить теорию Прандтля. При производстве опытов является необходимость в двух поправках: нужно оценить влияние собственного веса полосы и влияние повышение или понижение точки приложения силы. Так как здесь идет речь о малых поправках, то и для вычисления, конечно, вполне достаточно пользоваться лишь первым приближением. Рекомендуется эффективный вариант энергетического метода при расчете прямоугольных консольных полос для устойчивости плоской формы изгиба с учетом собственного веса. Суть этого варианта метода заключается в использовании вариационного принципа Лагранжа вместо условия равенства потенциальной энергии деформации и работы внешних сил. Предложенный подход позволяет выполнить машинную реализацию вычислений и учесть произвольное число членов ряда. Решение задачи для консольной балки представлено с учетом собственного веса и действия сосредоточенной силы.

Ключевые слова: метод энергии, расчет, изгиб, консольная полоса, устойчивость

Введение

Впервые задача устойчивости плоской формы изгиба полосы под действием силы, приложенной на конце была решена профессором Л. Прандтлем [1]. Для определения $F_{кр}$ им представлено точное решение трансцендентного уравнения, наименьший корень которого дает нам результат:

$$F_{кр} = \frac{K\sqrt{EI_z GI_k}}{l^2} \quad K_F = 4,01 \quad K_q = 12,85$$

Для определения $F_{кр}$ С.П. Тимошенко [2] предложил приближенный энергетический метод. Плоская форма изгиба будет устойчива, пока всякое отклонение от нее сопровождается увеличением энергии системы, другими словами, пока энергия кручения и энергия изгиба в плоскости x, y при всяком отклонении от плоской формы будут в сумме меньше работы силы F при том же отклонении.

Вариант метода, предложенного С.П. Тимошенко, предполагает определение критической нагрузки из условия, при котором работа внешних сил равна потенциальной энергии поперечного изгиба и кручения полосы. Потенциальная энергия деформации выражается через угол закручивания, а затем функция угла закручивания находится в форме тригонометрического ряда. Форма энергетического метода, предложенная С.П. Тимошенко для решения задачи, не очень удобна для машинной реализации и при числе членов ряд больше двух требует громоздких выкладок. Вместо условия равенства потенциальной энергии деформации и работы внешних сил, воспользуемся вариационным принципом Лагранжа.

Методы и материалы

Метод расчета будет продемонстрирован на примере консольной балки под действием нагрузки в виде сосредоточенной силы, действующей совместно с собственным весом балки (рис. 1).

Рис. 1. Расчетная схема
Fig. 1. Calculated scheme

Рассмотрим два случая: 1. $F = 0$; 2. $q = 0$.

Введем безразмерную координату $\xi = \frac{x}{l}$. Изгибающий момент в балке определяется по формуле:

$$1. F = 0; M_y(x) = -\frac{ql^2}{2} + qlx - \frac{qx^2}{2} = \frac{ql^2}{2}(-1 + 2\xi - \xi^2) = ql^2 \underline{M}(\xi)$$

где

$$\underline{M}(\xi) = \frac{(-1 + 2\xi - \xi^2)}{2} \quad (1)$$

$$2. q = 0; M_y(x) = F(x - l) - Fl(\xi - 1) - Fl \underline{M}(\xi)$$

где

$$\underline{M}(\xi) = (\xi - 1);$$

Определим критическую нагрузку из условия минимума полной энергии U , которая определяется как:

$$U = W - A \quad (2)$$

где W – потенциальная энергия деформации, а A – работа внешних сил.

Значения W и A для балки с постоянной жесткостью при приложении нагрузки в центре тяжести поперечного сечения определяются по формулам [3]:

$$W = \frac{1}{2} \left(EI_z \int_0^l \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx + GI_k \int_0^l \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx \right) \quad (3)$$

$$A = \int_0^l M_y \theta \frac{d^2 v}{dx^2} dx \quad (4)$$

где v – боковое отклонение балки, EI_z – жесткость на изгиб в плоскости наименьшей жесткости, GI_k – жесткость на кручение.

Вторая производная бокового прогиба выражается через угол закручивания следующим образом [4]:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_y \theta}{EI_z}. \quad (5)$$

Тогда

$$A = \int_0^l \frac{M_y^2 \theta^2}{EI_z} dx$$

Подставляя (5) в (4), а затем (4) и (3) в (2), получаем:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \left(GI_k \int_0^l \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx + EI_z \int_0^l \frac{M_y^2 \theta^2}{(EI_z)^2} dx \right) - \int_0^l \frac{M_y^2 \theta^2}{EI_z} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(GI_k \int_0^l \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx - \int_0^l \frac{M_y^2 \theta^2}{EI_z} dx \right); \\ U &= \frac{1}{2} \left(\frac{GI_k}{l^2} \int_0^1 \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 d\xi - \frac{q^2 l^4}{EI_z} \int_0^1 (M)^2 \theta^2 d\xi \right); \text{ умножим на } \frac{2l^2}{GI_k} \\ U &= \int_0^1 \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 d\xi - \lambda \int_0^1 \underline{M}^2 \theta^2 d\xi \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\lambda = \frac{q^2 l^6}{G I_k E I_z}, \quad \underline{M}(\xi) = \frac{M_y(\xi)}{q l^2} = \frac{(-1 + 2\xi - \xi^2)}{2}$$

Функцию угла закручивания представим в виде ряда:

$$\theta(\xi) = \sum_{i=1}^n a_i f_i \quad i = 1, 3, 5, \dots, n. \quad (7)$$

где a_i – неопределенные коэффициенты, f_i – базисные функции, которые должны удовлетворять граничным условиям.

Для рассматриваемой задачи граничные условия имеют вид:

$$\theta(0) = 0; \quad \frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = 0; \quad (8)$$

Ранее в качестве базисной функции была использована $f_i = 1 - \cos\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$ и показала плохую сходимость. Рассмотрим в качестве базисной функции

$$f_i = \sin\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right) \quad (9)$$

Определим частные производные функции $\theta(\xi)$ выражения (7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f_i}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial}{\partial a_j} \left(\left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^2 \right) &= 2 \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial a_j} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) = 2 \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \frac{\partial f_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial a_j} (\theta^2) &= 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial a_j} = 2 \sum_{i=1}^n a_i f_i f_j \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^n \pi i a_i \cos \pi i \xi; \quad \frac{\partial}{\partial a_j} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) = \pi j \cos(\pi j \xi); \quad \frac{\partial \theta}{\partial a_j} = \sin(\pi j \xi); \\ \frac{\partial}{\partial a_j} \int_0^1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^2 d\xi &= 2 \sum_{i=1}^n a_i \int_0^1 \pi^2 i j \cos(\pi i \xi) \cos(\pi j \xi) d\xi; \end{aligned}$$

Минимизация функционала U осуществляется коэффициентами ряда (7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial a_j} &= 0, \quad j = 1 \dots n \\ \sum_{i=1}^n a_i \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \frac{\partial f_j}{\partial \xi} d\xi - \lambda \sum_{i=1}^n a_i \int_0^1 f_i f_j \left(\underline{M}(\xi) \right)^2 d\xi &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Выражение (10) будет эквивалентно следующему матричному выражению:

$$([A] - \lambda[B])[X] \quad (11)$$

где вектор неизвестных коэффициентов, элементы матриц $[A]$ и $[B]$ рассчитываются по формулам:

$$A_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \frac{\partial f_j}{\partial \xi} d\xi; \quad B_{ij} = \int_0^1 f_i f_j \left(\underline{M}(\xi) \right)^2 d\xi; \quad (12)$$

После подстановки (9) в (12), получим:

$$\begin{aligned} 1. \quad F &= 0; \\ A_{ij} &= \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \frac{\partial f_j}{\partial \xi} d\xi = \frac{\pi^2 ij}{4} \int_0^1 \frac{\sin(\pi i \xi)}{2} \frac{\sin(\pi j \xi)}{2} d\xi = \left\{ \frac{\pi^2 ij}{8}, i = j \quad 0, i \neq j \right. \\ B_{ii} &= \frac{\pi^4 i^4 - 20\pi^2 i^2 + 120}{40\pi^4 i^4}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$B_{ij} = \int_0^1 f_i f_j \left(\frac{M(\xi)}{2} \right)^2 d\xi = \int_0^1 f_i f_j \left[\frac{(1 + 2\xi - \xi^2)}{2} \right]^2 d\xi; \quad (14)$$

Интегрирование в формуле (14) для функций (9) выполняется численно.

Критическая нагрузка вычисляется из условия равенства нулю определителя системы (11):

$$|[A] - \lambda[B]| = 0 \quad (15)$$

Таким образом, задача сводится к обобщенному вековому уравнению. В таблице 1 представлены значения коэффициента $K = \sqrt{\lambda_{min}}$ при различном числе членов ряда.

Критическая нагрузка определяется по формуле:

$$(ql)_{кр} = \frac{K \sqrt{EI_x G I_k}}{l^2} \quad 2. \quad q = 0;$$

$$A_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \frac{\partial f_j}{\partial \xi} d\xi = \frac{\pi^2 ij}{4} \int_0^1 \frac{\sin(\pi i \xi)}{2} \frac{\sin(\pi j \xi)}{2} d\xi = \begin{cases} \frac{\pi^2 ij}{8}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (16)$$

$$B_{ii} = \frac{\pi^2 i^2 - 6}{6\pi^2 i^2};$$

$$B_{ij} = \int_0^1 f_i f_j \left(\frac{M(\xi)}{2} \right)^2 d\xi = \int_0^1 f_i f_j (\xi - 1)^2 d\xi; \quad (17)$$

Интегрирование в формуле (17) для функций (9) выполняется численно.

Результаты и обсуждения

Значения коэффициента $K = \sqrt{\lambda_{min}}$, полученные по нашей методике для рассматриваемой функции при различном числе членов ряда, приведены на графике. Сходимость в зависимости от числа членов ряда показана в табл. 1 и 2. Также в табл. 2 приведены для сравнения результаты при использовании других базисных функций, представленных в работе [5].

В работе [1] путем прямого интегрирования уравнения дифференциальной устойчивости получено значение $K = 4,0126$.

На рис. 2 и рис. 3 приведены графики зависимости коэффициента K от числа членов ряда n

<p>Рис. 2 Сходимость метода в зависимости от числа членов ряда при $F = 0$</p> <p>Fig. 2 Convergence of method in dependence from the number of members of the series at $F = 0$</p>	<p>Рис. 3 Сходимость метода в зависимости от числа членов ряда при $q = 0$: Синяя штрих пунктирная – степенной ряд, Красная пунктирная – $f_i = 1 - \cos\left(\frac{\pi i}{2}\right)$, Черная сплошная 0150 $f_i = \sin\left(\frac{\pi i}{2}\right)$</p> <p>Fig. 3 Convergence of method in dependence from the number of members of the series at $q = 0$: Blue Dashed Stroke - Power Series, Red Dashed Stroke – $f_i = 1 - \cos\left(\frac{\pi i}{2}\right)$, Black Continuous 0150 $f_i = \sin\left(\frac{\pi i}{2}\right)$</p>

Таблица 1

Величины коэффициента K при различном числе членов ряда для консольной балки при $F = 0$

Table 1

Values of K Coefficient at Different Number of Row Members for Cantilever Beam at $F = 0$

1	2	3	4	5
15,4966	13,2341	12,9081	12,8633	12,8589
6	7	8	9	10
12,8544	12,8540	12,8539	12,8538	12,8538

Таблица 2

Величины коэффициента K при различном числе членов ряда для консольной балки $q = 0$.

Table 2

Values of K Coefficient at Different Number of Row Members for Cantilever Beam $q = 0$.

n	1	2	3	4	5
$K(\text{авторы}) f_i = \sin\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$	4,345	4,023	4,0132	4,0127	4,0126
$K f_i = 1 - \cos\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$	10,04	5,31	4,67	4,47	4,37
$K(\text{степенной ряд}) f_i = \xi^{i+1}$	11,83	5,77	4,65	4,35	4,24
n	6	7	8	9	10
$K(\text{авторы}) f_i = \sin\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$	4,0126	4,0126	4,0126	4,0126	4,0126
$K f_i = 1 - \cos\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$	4,30	4,26	4,23	4,20	4,18
$K(\text{степенной ряд}) f_i = \xi^{i+1}$	4,18	4,14	4,11	4,09	4,08

Выводы

Анализируя сходимость для варианта $F = 0$, можно сказать (табл. 1), что результат довольно быстро приближается к точному решению, начиная с четвертого приближения. Отклонение от точного решения при $n = 4$ составляет 0,1047%.

Что касается варианта $q = 0$, то (табл. 2), отклонение от точного решения при $n = 10$ составляет 4,07% в случае использования тригонометрического ряда с $f_i = 1 - \cos\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$, а при использовании степенного ряда – 1,71%. Для функций $f_i = 1 - \cos\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$ при больших n вычислительный процесс был устойчив, но значение 4,01 с точностью до 3-го знака после запятой было получено лишь при 1000 членах ряда.

Также при $n \geq 12$ для степенного ряда $f_i = \xi^{i+1}$ наблюдалась потеря устойчивости вычислительного процесса (мнимые собственные значения).

Для решения авторов с базисными функциями (9) при $n = 3$ отклонение от точного решения составляет лишь 0,078%. Таким образом, сходимость метода существенно зависит от правильного выбора базисных функций.

Литература

1. L. Prandtl Kipperscheinungen. Dissert. Нюрнберг 1899.
2. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. Л., М.: Гостехиздат, 1946. 532 с.
3. Ищенко А.В., Зотов И.М. Энергетический метод в расчетах балок прямоугольного поперечного сечения при боковом выпучивании // Инженерный вестник Дона. 2019. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5583
4. Карамышева А.А. Совершенствование расчета на устойчивость плоской формы изгиба деревянных балок переменного сечения и их оптимизация: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17. Ростов-на-Дону, 2016. 124 с.
5. Лапина А.П., Зотов И.М., Чепурненко А.С., Языев Б.М. Совершенствование энергетического метода в расчетах балок на устойчивость плоской формы изгиба // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2019. №77. С. 5 – 16.
6. Yazyev S.B., Karamisheva A.A., Avakov A.A. Calculation of plane bending stability of beams with variable stiffness // Procedia Engineering. 2016. Vol. 150. P. 1872 – 1877.

7. Языев С.Б., Карамышева А.А., Дудник А.Е. Выпучивание двухскатной балки при чистом изгибе // Актуальные проблемы технических наук в России и за рубежом: Материалы международной научно-практической конференции. Уфа, 2015. С. 35 – 37.
8. Языев С.Б., Карамышева А.А., Никора Н.И., Расчет на устойчивость плоской формы деформирования односкатной балки // Актуальные проблемы технических наук в России и за рубежом: Материалы международной научно-практической конференции. Уфа, 2015. С. 32 – 35.
9. Wang C.M. Beam-Buckling Analysis via Automated Rayleigh-Ritz Method // Journal Structure Engineering. 1994. Vol. 120 (1). P. 200 – 211.
10. Tong G.A., Zhang L. General Theory for the Flexural-Torsional Buckling of Thin-Walled Members I: Fictitious Load Method // Advance in Structure Engineering. 2003. Vol. 6(4). P. 299 – 308.
11. Pengcheng J. Analytical Evaluations of Buckling Behavior of Wood Composite I-Joist with Sinusoidal Web. Morgantown: West Virginia University, 2012. 106 p.
12. Galishnikova V.V., Tesfaldet H. Gebre. A comparative study of beam design curves against lateral torsional buckling using AISC, EC and SP // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. №15(1). С. 25 – 32.
13. Ascione L., Giordano A., Spadea S. Lateral buckling of pultruded FRP beams // Composites Part B: Engineering. 2011. Vol. 42 (4). P. 819 – 824.
14. Anapayan T, Mahedran M. Numerical modelling and design of LiteSteel Beams subject to lateral buckling // Journal of Constructional Steel Research. 2012. Vol. 70. P. 51 – 64.
15. Asgarian B., Soltani M., Mohri F. Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross-sections // Thin-walled structures. 2013. Vol. 62. P. 96 – 108.

References

1. L. Prandtl Kipperscheinungen. Dissert. Nyurenberg 1899.
2. Timoshenko S.P. Ustojchivost' uprugih sistem. L., M.: Gostekhizdat, 1946. 532 p. (rus.)
3. Ishchenko A.V., Zotov I.M. Energeticheskij metod v raschetah balok pryamougol'nogo poperechnogo secheniya pri bokovom vypuchivanii. Inzhenernyj vestnik Dona. 2019. 1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5583 (rus.)
4. Karamysheva A.A. Sovershenstvovanie rascheta na ustojchivost' ploskoj formy izgiba derevyan-nyh balok peremennogo secheniya i ih optimizaciya: dis. ... kand. tekhn. nauk: 05.23.17. Rostov-na-Donu, 2016. 124 p. (rus.)
5. Lapina A.P., Zotov I.M., Chepurnenko A.S., Yazyev B.M. Sovershenstvovanie energeticheskogo metoda v raschetah balok na ustojchivost' ploskoj formy izgiba. Vestnik Volgogradskogo gosudar-stvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arhitektura. 2019. 77. P. 5 – 16. (rus.)
6. Yazyev S.B., Karamysheva A.A., Avakov A.A. Calculation of plane bending stability of beams with variable stiffness. Procedia Engineering. 2016. 150. P. 1872 – 1877.
7. Yazyev S.B., Karamysheva A.A., Dudnik A.E. Vypuchivanie dvuhskatnoj balki pri chistom izgibe. Aktual'nye problemy tekhnicheskikh nauk v Rossii i za rubezhom: Materialy mezhdunarodnoj nauch-no-prakticheskoy konferencii. Ufa, 2015. P. 35 – 37. (rus.)
8. Yazyev S.B., Karamysheva A.A., Nikora N.I., Raschet na ustojchivost' ploskoj formy deformirovaniya odnoskatnoj balki. Aktual'nye problemy tekhnicheskikh nauk v Rossii i za rubezhom: Materialy mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. Ufa, 2015. P. 32 – 35. (rus.)
9. Wang C.M. Beam-Buckling Analysis via Automated Rayleigh-Ritz Method. Journal Structure Engineering. 1994. 120 (1). P. 200 – 211.
10. Tong G.A., Zhang L. General Theory for the Flexural-Torsional Buckling of Thin-Walled Members I: Fictitious Load Method. Advance in Structure Engineering. 2003. 6(4). P. 299 – 308.
11. Pengcheng J. Analytical Evaluations of Buckling Behavior of Wood Composite I-Joist with Sinusoidal Web. Morgantown: West Virginia University, 2012. 106 p.
12. Galishnikova V.V., Tesfaldet H. Gebre. A comparative study of beam design curves against lateral torsional buckling using AISC, EC and SP. Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstrukcij i sooruzhenij. 2019. 15 (1). P. 25 – 32.
13. Ascione L., Giordano A., Spadea S. Lateral buckling of pultruded FRP beams. Composites Part B: Engineering. 2011. 42 (4). P. 819 – 824.
14. Anapayan T, Mahedran M. Numerical modelling and design of LiteSteel Beams subject to lateral buckling. Journal of Constructional Steel Research. 2012. 70. P. 51 – 64.
15. Asgarian B., Soltani M., Mohri F. Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross-sections. Thin-walled structures. 2013. 62. P. 96 – 108.

*Yazyev S.B. *, Candidate of Engineering Sciences (Ph.D.), Associate Professor,
Don State Technical University, Russia*

**Corresponding author E-mail: ps62@yandex.ru*

ENERGY METHOD BASED ON THE STABILITY OF THE FLAT SHAPE OF THE CANTILEVER STRIP BEND TAKING INTO ACCOUNT ITS OWN WEIGHT

Abstract: the problem of bending a strip by a force applied at the end is not of practical interest. Such method of loading and securing the ends is interesting only because it is most convenient to implement it on experience, which makes it possible to verify the Prandtl theory. When conducting experiments, there is a need for two corrections: it is necessary to evaluate the influence of the self-weight of the strip and the effect of increasing or decreasing the point of force application. As we are talking about small corrections, it is quite enough to use only the first approximation for calculations. An effective version of the energy method is recommended. It is used to calculate rectangular cantilever strips for stability of a flat bending shape, taking into account its own weight. The essence of this variant of the method is to use the Lagrange variational principle instead of the condition for equality of the potential strain energy and the work of external forces. The proposed approach allows us to perform machine implementation of calculations and take into account an arbitrary number of members of the series. The presented solution of the problem for the cantilever beam takes into account its own weight and the action of concentrated force.

Keywords: energy method, calculation, bending, cantilever band, stability

Для цитирования: Языев С.Б. Метод энергии в расчете на устойчивость плоской формы изгиба консольной полосы с учетом собственного веса // Строительные материалы и изделия. 2020. Том 3. №1. С. 76 – 82. DOI: 10.34031/2618-7183-2020-3-1-76-82

For citation: Yazyev S.B. Energy method based on the stability of the flat shape of the cantilever strip bend taking into account its own weight. Construction Materials and Products. 2020. 3 (1). P. 76 – 82. DOI: 10.34031/2618-7183-2020-3-1-76-82

Поступила в редакцию 8 ноября 2019 г.

Принята в доработанном виде 15 декабря 2019 г.

Одобрена для публикации 13 февраля 2020 г.

Received: November 8, 2019.

Revised: December 15, 2019.

Accepted: February 13, 2020.