DOI: 10.34031/2618-7183-2020-3-1-70-75

Садыгов И.Р. *, доктор технических наук, профессор,
Азербайджанский архитектурно-строительный университет, Азербайджан
*Ответственный автор E-mail: rahib36@mail.ru

СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ С УЧЕТОМ ПЕРЕМЕННОСТИ ТОЛЩИНЫ ИЗ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Аннотация: в статье рассмотрены вопросы колебаний оболочек, которые находят широкое применение в различных отраслях промышленности, строительства. Оболочки служат элементами строительных конструкций, покрытиями и перекрытиями сооружений с большими пролетами. В разделе «Введение» рассмотрены вопросы, связанные с применением оболочек во всех областях промышленности, в авиа и ракетно-космической технике, железнодорожном транспорте, в нефтегазовой промышленности, приведены примеры оболочек, для применения в перекрытиях цирков, вокзалов, ангаров; в промышленности: оболочки вращения, применяемые в качестве резервуаров, емкостей, сепараторов, колонн, реакторов и др. В разделе «Материалы и методы исследования» рассмотрены свободные и вынужденные колебания оболочек переменной толщины, выполненные из нелинейно-упругого материала. При расчете оболочки использована гипотеза Кирхгофа-Лява. Установлено, что, при колебаниях, оболочки испытывают относительные деформации удлинения и сдвига поверхности координатами (x, y), а также деформации изгиба и кручения.

Установлено, что колебания в оболочке приводят к повороту главных направлений упругости относительно принятых осей координат на угол θ , а упругие постоянные материала зависят от упругих постоянных B_{ij} – основных направлений нелинейно-упругой оболочки. При решении системы уравнений движения оболочки относительно возникающих в ней при колебаниях перемещений основаны на теории R функции и вариационных методах. Получены значения безразмерного частотного параметра для сферической оболочки с учётом изменения её кривизны, переменности толщины и упругих свойств.

Ключевые слова: колебания оболочки, кривизна, свободные и вынужденные, переменная толщина, нелинейно – упругая, амплитуда, собственные функции, частота колебаний

Введение

В настоящее время во всех областях промышленности, в авиа и ракетно-космической технике применяются тела, называемые оболочками. Особенно распространены оболочки в строительстве зданий и сооружений. Они служат элементами строительных конструкций, покрытиями и перекрытиями сооружений с большими пролетами. Примером таких оболочек являются перекрытия цирков, вокзалов, ангаров (см. рис. 1).

а) крыша торгового пассажа (г. Москва)

б) строящийся аэропорт (г. Мехико)

в) крыша трибуны стадиона (Германия)

Рис. 1. Оболочки – перекрытия зданий
Fig. 1. Covers are Overlappings of Buildings

В железнодорожном транспорте оболочками являются кузов локомотива и стенки цистерн. В нефтегазовой промышленности широко используются оболочки вращения, применяемые в качестве резервуаров, емкостей, сепараторов, колонн, реакторов.

Оболочкой называется такое тело, у которого один размер значительно превышает другие размеры. Оболочки могут быть различных размеров и форм, одинаковой и различной толщины, с ребрами жесткости и с накладными элементами.

В процессе эксплуатации на оболочку оказывают воздействие внешние факторы: ветровые и снеговые нагрузки, вес других тел, колебания других машин и механизмов; внутренние: избыточное давление, тем-

пература, вес внутренних устройств и конструкций. Эти воздействия могут привести к растяжению оболочки, ее деформациями и последующему разрушению с катастрофическими последствиями.

Методы и материалы

Рассмотрим свободные и вынужденные колебания оболочку и переменной толщины, которая выполнена из нелинейно – упругого материала. Оболочка имеет толщину, которая зависит от двух координат: $h(x, y)$. Расчет основан на гипотезах Кирхгофа – Лява.

При колебаниях оболочка испытывает относительные деформации удлинения и сдвига поверхности с координатами (x, y) :

$$\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})^T, \quad (1)$$

а также деформации изгиба и кручения:

$$\chi = (\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12})^T, \quad (2)$$

Эти параметры составлены из следующих выражений:

$$\varepsilon_{11} = u_x + \frac{w}{R_x} + \frac{w_x^2}{2}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{22} = v_y + \frac{w}{R_y} + \frac{w_y^2}{2}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_{12} = u_x + v_y + w_x + w_y, \quad (5)$$

$$\chi_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (6)$$

$$\chi_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (7)$$

$$\chi_{12} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (8)$$

где $u(x, y)$; $v(x, y)$; $w(x, y)$ – функции перемещения точек, расположенных на срединной поверхности оболочки вдоль соответственно осей x, y, z ;

При указанных выше воздействиях, усилия $N = (N_{11}, N_{22}, N_{12})$, действующие на оболочку, и моменты $M = (M_{11}, M_{22}, M_{12})$ можно найти с применением приведенных жесткостных коэффициентов C_{ij} ; D_{ij} [1].

Они функционально зависят от координат (x, y) и могут быть определены по следующим формулам:

$$C_{ij} = B_{ij} h(x, y), \quad (9)$$

$$D_{ij} = B_{ij} \frac{h^3(x, y)}{12}, \quad (10)$$

$$B_{11} = \frac{E_1}{(1 - \nu_1 \cdot \nu_2)}, \quad (11)$$

$$B_{22} = \frac{E_2}{(1 - \nu_1 \cdot \nu_2)}, \quad (12)$$

$$B_{66} = C_{12}, \quad (13)$$

$$B_{12} = \frac{\nu_2 \cdot E_1}{1 - \nu_1 \cdot \nu_2} = \frac{\nu_1 \cdot E_2}{1 - \nu_1 \cdot \nu_2}, \quad (14)$$

$$B_{16} = B_{26} = 0, \quad (15)$$

где $i = 1, 2, 6$;

$E_{1,2}$ – модуль упругости материала, из которого изготовлена оболочка, МПа; ν – коэффициент Пуассона.

Рассмотрим выражение усилий и моментов в зависимости от жесткостных коэффициентов C_{ij} ; D_{ij} :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

где

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Колебания в оболочке приводят к повороту главных направлений упругости относительно принятых осей координат на угол θ . А упругие постоянные материала зависят от упругих постоянных B_{ij} — основных направлений нелинейно — упругой оболочки.

Результаты и обсуждения

Рассмотрим систему уравнений движения оболочки относительно возникающих в ней при колебаниях перемещений:

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= -Nl_1w + m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w &= -Nl_2w + m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w &= -Nl_3w + m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Решение этой системы уравнений основано на теории R функции и вариационных методах [2]. При этом жесткостные характеристики оболочки зависят от координат исследуемой точки, расположенной на оболочке. Они вычисляются для каждого закона изменения толщины оболочки. Таким образом, вначале решается линейная задача о свободных колебаниях рассматриваемой оболочки, в которой производится поиск собственных функций, соответствующих форме колебаний. С целью решения нелинейной задачи, прогиб оболочки при колебаниях определяем по следующей зависимости:

$$W = y(t) \cdot w^2 \quad (20)$$

Если выполнить подстановку этого выражения в первые 2 уравнения нелинейной системы перемещений точки на поверхности оболочки, и при этом пренебречь силами возникающей инерции в срединной плоскости, то получим следующую систему:

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + y(t)L_{13}w^c &= -y^2(t)Nl_1(w^c(x, y)), \\ L_{21}u + L_{22}v + y(t)L_{23}w^c &= -y^2(t)Nl_2(w^c(x, y)). \end{aligned} \quad (21)$$

При этом, если учесть, что:

$$u(x, y, t) = \Delta(y(t)u^c(x, y)) + y^2(t)u_{11}(x, y), \quad (22)$$

$$v(x, y, t) = \Delta(y(t)v^c(x, y)) + y^2(t)v_{11}(x, y). \quad (23)$$

При этом функции: $u_{11}(x, y); v_{11}(x, y)$ — являются решением системы Ламе:

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v &= Nl_1(w^c), \\ L_{21}u + L_{22}v &= Nl_2(w^c). \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнения (19) будут удовлетворены тождественно. Величина Δ в уравнениях (22) и (23) для оболочек равна 1.

После подстановки уравнений (20), а также (22), (23) для $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $w(x, y, t)$ в 3-е уравнение системы (19) и, применив при этом, процедуру Бубнова–Галеркина [3], получим следующее нелинейное дифференциальное уравнение:

$$\xi^2(\tau) + \xi(\tau) + \beta\xi^2(\tau) + \gamma\xi^3(\tau) = 0, \quad (25)$$

где:

$$\tau = \omega_L t, \quad (26)$$

$$\xi = \frac{y(\tau)}{h}. \quad (27)$$

Опуская решение этого уравнения, в итоге получаем для определения амплитудно-частотной характеристики:

$$\xi(t) = A \cos \omega_N \tau \quad (28)$$

Применяя метод Бубнова–Галеркина, на промежутке, который равен $1/4$ периода колебаний оболочки, найдем зависимость между наибольшей амплитудой колебаний A и отношением нелинейной частоты колебаний к линейной $\nu = \omega_N / \omega_L$:

$$\nu = \sqrt{1 + \frac{8}{3\pi} \beta A + \frac{3}{4} \gamma A^2} \quad (29)$$

При исходных параметрах $E_1 = 47,6 \text{ ГПа}$; $E_2 = 20,7 \text{ ГПа}$; $G_{12} = 5,31 \text{ ГПа}$; $\nu_{12} = 0,149$ ГПа; $h = h_0 \cdot (1 + \alpha(6x^2 - 6x + 1))$, где α – постоянный коэффициент, изменение которого происходит в интервале $[-0,5; 0,5]$;

h_0 – толщина оболочки, которая соответствует $\alpha = 0$.

При этом геометрические параметры оболочки будут следующие:

$$\frac{h_0}{a} = 0,008, \\ \frac{b}{a} = 1,0.$$

Характеристика колебаний оболочки принята по значениям безразмерного параметра:

$$\Lambda_1 = \lambda_i (2a)^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}, \quad (30)$$

где

$$D_0 = E_{11} h_0^3 / (12(1 - \nu_{12}\nu_{21})). \quad (31)$$

На рис. 2 представлены формы колебаний оболочки, которая имеет жесткое закрепление и сферическую форму при следующих значениях переменных $\alpha = -0,3$; $k_x = k_y = 0,08$; $0,32$; $\theta = 45^\circ$:

В табл. 1 представлены значения безразмерного частотного параметра Λ_1 для сферической оболочки, которая имеет жесткое закрепление с квадратным планом, ориентированным по координатной сетке.

Таблица 1

Значения безразмерного частотного параметра Λ_1 .

Table 1

Dimensionless Frequency Parameter Values Λ_1 .

$k_x = k_y$	-0,5	0	0,5
0,08	42,89	45,83	48,94
0,32	109,5	112,8	114,4

Рис. 2. Колебания сферической оболочки с учетом изменения ее кривизны (для $k_x = k_y = 0,08; 0,32; 0,64$)
Fig. 2. Oscillations of spherical shell taking into account changes in its curvature (for $k_x = k_y = 0,08; 0,32; 0,64$)

В табл. 2 приведены значения безразмерного частотного параметра Λ_1 в зависимости от кривизны оболочки, ее толщины, угла поворота и изменяющихся упругих свойств.

Таблица 2

Значения безразмерного частотного параметра Λ_1 в зависимости от кривизны оболочки, ее толщины, угла поворота и изменяющихся упругих свойств.

Table 2

The Values of The Dimensionless Frequency Parameter Λ_1 Depending on the Curvature of the Shell, its Thickness, Rotation Angle and Varying Elastic Properties.

Угол θ	$k_x = k_y$	-0,5	0	0,5
30	0,08	42,385	44,905	47,208
45	0,32	109,58	111,13	110,77
60	0,64	43,821	44,905	45,709

Выводы

Описанный выше расчетный алгоритм позволяет определить места прогиба оболочек из нелинейно-упругого материала переменной толщины, (значение которой изменяется по координатам x, y) в зависимости от углов поворота при свободных и вынужденных колебаниях.

Литература

1. Прочность, устойчивость, колебания // Справочник: в 3-х т. / Под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. Издательство «Машиностроение» М., 1988. Т. 3. 415 с.
2. Теория R – функций и некоторые ее приложения // Прикладная механика. 2007. №4. С. 89 – 99.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
4. Новожилов В.В. «Теория точных оболочек». Л. Судпромгиз., 1962.
5. Черных К.Ф. «Линейная теория оболочек». Изд-во ЛГУ, 1964. Т. 1, 2.
6. Биргер И.А. «Круглые пластинки и оболочки вращения». М.: Машгиз, 1962.
7. Власов В.З. «Общая теория оболочек и ее применение в технике». М.-Л. ГИТТЛ., 1949.
8. Тимошенко С.П., Вайновский-Кригер С. «Пластины и оболочки» М.: Физматгиз, 1963.

References

1. Prochnost', ustojchivost', kolebaniya. Spravochnik: v 3-h t. Pod red. I.A. Birgera, YA.G. Panovko Izdatel'stvo «Mashinostroyeniye» M., 1988. 3. 415 p. (rus.)
2. Teoriya funktsiy i nekotorye ee prilozheniya. Prikladnaya mekhanika. 2007. 4. P. 89 – 99. (rus.)
3. Vol'mir A.S. Nelinejnaya dinamika plastin i obolochek. M.: Nauka, 1972. 432 p. (rus.)
4. Novozhilov V.V. «Teoriya tochnykh obolochek». L. Sudpromgiz., 1962. (rus.)
5. Chernykh K.F. «Linejnaya teoriya obolochek». Izd-vo LGU, 1964. 1, 2. (rus.)
6. Birger I.A. «Kruglye plastinki i obolochki vrashcheniya». M.: Mashgiz, 1962. (rus.)
7. Vlasov V.Z. «Obshchaya teoriya obolochek i ee primeneniye v tekhnike». M.-L. GITTL., 1949. (rus.)
8. Timoshenko S.P., Vajnovskij-Kriger S. «Plastiny i obolochki» M.: Fizmatgiz, 1963. (rus.)

**Sadygov I.R. *, Doctor of Engineering Sciences (Advanced Doctor), Professor,
Azerbaijan University of Architecture and Construction, Azerbaijan**

*Corresponding author E-mail: rahib36@mail.ru

FREE AND FORCED VIBRATIONS OF SHELLS OF VARIOUS SHAPES, TAKING INTO ACCOUNT THE VARIABILITY OF THE NON-LINEAR ELASTIC MATERIAL

Abstract: the article considers issues of shell vibrations, which are widely used in various industries and construction. Shells serve as elements of building structures with large spans.

The chapter “Introduction” discussed issues related to the use of shells in all areas of industry, in aviation, rocket and space technology, railway transport, in the oil and gas industry and provides examples of shells for use in ceilings of circuses, stations, hangars; in industry: shells of rotation used as tanks, containers, columns, reactors, etc. In the section “Materials and research methods” free and forced vibrations of shells of variable thickness made out of nonlinear elastic material reviewed. In shell calculations the Kirchhoff – Law hypothesis was used. It was found that, during vibrations, the shells experience relative deformation of elongation and shear of the surface with coordinates (x, y), as well as bending and torsion strains. It is established that vibrations in the shells lead to a rotation of the main directions of elasticity and regarding to the adopted coordinate axis to angle θ , and the elastic constants of the material depend on the elastic constant B_{iy} – the main directions of the nonlinear elastic shells.

When solving the system of equations of motion of the shell relative to the displacements arising in it during vibration, based on theory R and various methods. The values of the dimensionless frequency parameter for a spherical shell taking into account changes in its curvature, variability and thickness of elastic properties are obtained.

Keywords: shell vibrations, curvature, free and forced, variable thickness, nonlinear - elastic, amplitude, vibration frequency

Для цитирования: Садыгов И.Р. Свободные и вынужденные колебания оболочек различной формы с учетом переменной толщины из нелинейно-упругого материала // Строительные материалы и изделия. 2020. Том 3. №1. С. 70 – 75. DOI: 10.34031/2618-7183-2020-3-1-70-75

For citation: Sadygov I.R. Free and forced vibrations of shells of various shapes taking into account the variability of thickness of the non-linear elastic material. Construction Materials and Products. 2020. 3 (1). P. 70 – 75. DOI: 10.34031/2618-7183-2020-3-1-70-75

Поступила в редакцию 25 декабря 2019 г.
Принята в доработанном виде 18 января 2020 г.
Одобрена для публикации 13 февраля 2020 г.

Received: December 25, 2019.
Revised: January 18, 2020.
Accepted: February 13, 2020.