

DOI: 10.34031/2618-7183-2021-4-3-41-53

Чепурненко В.С., аспирант,  
Хаихожев К.Н., аспирант,  
Языев С.Б. \*, кандидат технических наук, доцент,  
Аваков А.А., кандидат технических наук, доцент,  
Донской государственный технический университет, Россия  
\*Ответственный автор E-mail: ps62@yandex.ru

## СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ РАСЧЁТА ГИБКИХ ТРУБОБЕТОННЫХ КОЛОНН С УЧЁТОМ ОБЖАТИЯ В ПЛОСКОСТЯХ СЕЧЕНИЙ

**Аннотация:** статья посвящена новому разработанному составному конечному элементу, позволяющему моделировать работу труботонных колонн с учётом обжатия бетонного ядра со стороны стальной обоймы, а также геометрической нелинейности. В основу вывода разрешающих уравнений, а также выражений для элементов матрицы жёсткости заложена гипотеза плоских сечений. Проведено комплексное тестирование конечного элемента с использованием написанного авторами программного кода на языке MATLAB и ПК ANSYS, а также анализ эффективности нового КЭ в сопоставлении с классическими способами моделирования труботонных колонн в современных программных комплексах. Продемонстрировано значительное снижение порядка системы уравнений МКЭ по сравнению с моделированием труботонных конструкций в объёмной постановке в существующих расчётных комплексах с применением SOLID-элементов для бетонного ядра, имеющих 3 степени свободы в каждом из узлов, и SHELL-элементов для стальной обоймы, имеющих 6 степеней свободы в каждом из узлов, при сопоставимой точности определения НДС. Поведение стали и бетона в представленной работе принимается линейно-упругим, однако изложенная методика расчёта может быть обобщена на случай применения моделей нелинейного деформирования материалов.

**Ключевые слова:** труботонные конструкции, метод конечных элементов, геометрическая нелинейность, внецентренное сжатие, колонна, устойчивость

### Введение

Всё большее распространение труботонных конструкций в современном строительстве приводит к необходимости совершенствования численных и аналитических методов для их моделирования, проектирования, а также уточнения методик, заложенных в нормативную литературу.

Обжатие бетонного ядра со стороны стальной обоймы может повышать расчётное сопротивление бетона сжатию вплоть до 50-80% [1-2], вследствие это необходим корректный учёт влияния обоймы на НДС бетонного ядра. В классических балочных конечных элементах не учитываются нормальные напряжения в направлениях, перпендикулярных оси элемента [3]. Их учёт возможен в случае применения SOLID-элементов для моделирования работы бетонного ядра, имеющих 3 степени свободы в каждом из узлов, и SHELL-элементов для работы стальной обоймы, имеющих 6 степеней свободы в каждом из узлов, как, например, показано в работе [4].

Рассмотрим новый составной конечный элемент, учитывающий геометрическую нелинейность поведения конструкции, а также обжатие в плоскости сечения труботонного бетона. Схема КЭ приведена на рис. 1.

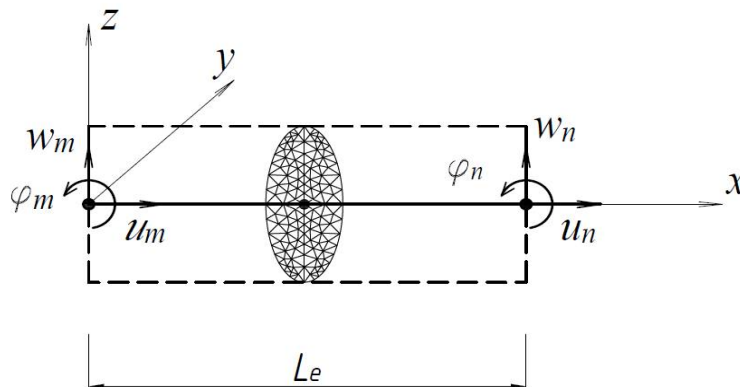


Рис. 1. Схема составного конечного элемента  
Fig. 1. Complex finite element scheme

На рис. 1  $u_m, w_m, \varphi_m, u_n, w_n, \varphi_n$  – узловые перемещения, соответствующие поведению элемента как балочного.  $L_e$  – длина конечного элемента.

Перемещения в поперечных сечениях относительно оси стержня принимаются постоянными по длине конечного элемента и определяются перемещениями узлов сетки плоских конечных субэлементов в поперечном срезе по середине длины конечного элемента. Схема плоского конечного субэлемента приведена на рис. 2.

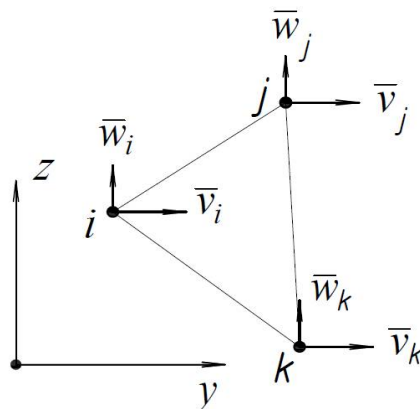


Рис. 2. Схема плоского конечного субэлемента  
Fig. 2. Plane finite sub-element scheme

На рис. 2  $\bar{v}_i, \bar{w}_i, \bar{v}_j, \bar{w}_j, \bar{v}_k, \bar{w}_k$  – узловые перемещения субэлемента в плоскости поперечного среза относительно оси стержня. Использование одного среза по длине конечного элемента оправдано незначительным изменением изгибающего момента и продольной силы по длине в трубобетонных конструкциях, применяемых преимущественно в виде внецентренно-сжатых колонн, соответственно и напряжений в плоскостях поперечных сечений.

Стальная обойма моделируется путём присоединения ферменных конечных элементов к узлам плоских субэлементов, лежащих на границе бетонного ядра.

Таким образом, суммарное число неизвестных перемещений для одного составного конечного элемента будет равно:

$$N = 6 + 2 \cdot N_{n,plane}, \quad (1)$$

здесь 6 – число степеней свободы, соответствующих классическому балочному конечному элементу, работающему на сжатие с изгибом в одной плоскости;

$N_{n,plane}$  – количество узлов в плоскости среза (2 дополнительных степени свободы в узле).

Прогибы  $w$  элементов аппроксимируются полиномом четвёртой степени, связывающим узловые прогибы и углы поворота.

Таким образом, порядок системы уравнений МКЭ значительно снижается по сравнению с моделированием трубобетонных конструкций в объёмной постановке в существующих программных комплексах с применением SOLID-элементов для бетонного ядра и SHELL-элементов для стальной обоймы.

Элементы матрицы жёсткости получим путём использования вариационного принципа минимума общей потенциальной энергии [5]:

$$\delta \Pi + \delta V = 0, \quad (2)$$

Вариация потенциальной энергии деформации составного конечного элемента складывается из энергии деформации бетонного ядра и обоймы:

$$\delta \Pi = \delta \Pi_b + \delta \Pi_s, \quad (3)$$

$$\delta \Pi_b = \int_{V_b} (\sigma_x \delta \varepsilon_x^{el} + \sigma_y \delta \varepsilon_y^{el} + \sigma_z \delta \varepsilon_z^{el} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}^{el}) dV, \quad (4)$$

$\delta\varepsilon_x^{el}, \delta\varepsilon_y^{el}, \delta\varepsilon_z^{el}$  – вариации упругих относительных деформаций в направлениях  $x, y, z$  соответственно.

Относительная деформация в направлении оси  $x$  с учётом больших прогибов  $w$ , соответствующая компоненте тензора деформаций Грина [6], будет равна:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (5)$$

где  $u$  – перемещения в продольном направлении стержня;

$u_0$  – перемещения осевой линии в продольном направлении;

Уравнение (5) запишем в следующем виде:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + z\chi_0 = \varepsilon_0^L + \varepsilon_0^{NL} + z\chi_0, \quad (6)$$

здесь  $\varepsilon_0^L = \frac{\partial u_0}{\partial x}$  – линейная часть относительной деформации оси стержня;

$\varepsilon_0^{NL} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$  – нелинейная часть относительной деформации оси стержня;

$\chi_0 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  – кривизна оси стержня.

Разобьём равенство (4) на два слагаемых:

$$\delta\Pi_b = \delta\Pi_{b,bend} + \delta\Pi_{b,plane}, \quad (7)$$

$$\delta\Pi_{b,bend} = \int_{V_b} (\sigma_x \delta\varepsilon_x) dV, \quad (8)$$

$$\delta\Pi_{b,plane} = \int_{V_b} (\sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{yz} \delta\gamma_{yz}) dV. \quad (9)$$

Запишем выражение (9) в матричном виде, при этом используем обобщённый закон Гука и выразим компоненты тензора напряжений через деформации:

$$\delta\Pi_{b,plane} = \int_{V_b} \delta \begin{Bmatrix} \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} \lambda_b + 2\mu_b & \lambda_b & 0 \\ \lambda_b & \lambda_b + 2\mu_b & 0 \\ 0 & 0 & \mu_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \lambda_b \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ 0 \end{Bmatrix} \right) dV. \quad (10)$$

Обозначим  $\{\varepsilon_{pl}\} = [\varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{yz}]^T$  – вектор относительных деформаций в плоскости сечения;

$[D_{pl}] = \begin{bmatrix} \lambda_b + 2\mu_b & \lambda_b & 0 \\ \lambda_b & \lambda_b + 2\mu_b & 0 \\ 0 & 0 & \mu_b \end{bmatrix}$  – матрица упругих констант бетона в плоскости сечения, вычисля-

емая для каждого субэлемента на основе НДС в предыдущей итерации (в случае отсутствия пластических деформаций состоит из параметров Ламе, вычисляемых на основе начального модуля упругости бетона и коэффициента Пуассона). Уравнение (10) примет вид:

$$\delta\Pi_{b,plane} = \int_{V_b} (\delta\{\varepsilon_{pl}\})^T [D_{pl}] \{\varepsilon_{pl}\} + \delta\{\varepsilon_{pl}\}^T \lambda_b \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ 0 \end{Bmatrix} dV = I_1^{plane} + I_2^{plane}. \quad (11)$$

Пусть  $\{U_{pl}^p\} = [\bar{v}_i \ \bar{w}_i \ \bar{v}_j \ \bar{w}_j \ \bar{v}_k \ \bar{w}_k]^T$  - вектор узловых перемещений  $p$ -го субэлемента в плоскости среза. Тогда:

$$\{\varepsilon_{pl}^p\} = [B_{pl}]_p \{U_{pl}^p\}, \quad (12)$$

$[B_{pl}]_p$  – матрица градиентов, связывающая деформации и узловые перемещения в плоскостях срезов:

$$[B_{pl}]_p = \frac{1}{2\Delta^e} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}.$$

Тогда для каждого из субэлементов:

$$I_1^{plane} = \delta \{U_{pl}^p\}^T \int_{V_p} [B_{pl}]^T [D_{pl}] [B_{pl}] dV \{U_{pl}^p\}. \quad (13)$$

Узловые перемещения конечного элемента, соответствующие его поведению как балочного аппроксимируем следующим образом:

$$u_0(x) = u_m + \frac{u_n - u_m}{L_e} x, \quad (14)$$

$$w(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3, \quad (15)$$

$$\varphi(x) = \frac{\partial w}{\partial x} = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2, \quad (16)$$

здесь  $m, n$  – узлы элемента, координата  $x$  изменяется от 0 до  $L_e$ . Аппроксимационные коэффициенты  $\alpha_i$  определяются из условия равенства перемещений узловым в координатах, равных координатам узлов:

$$w(0) = w_m, \quad w(L_e) = w_n, \quad \varphi(0) = \varphi_m, \quad \varphi(L_e) = \varphi_n,$$

в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L_e & L_e^2 & L_e^3 \\ 0 & 1 & 2L_e & 3L_e^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_m \\ \varphi_m \\ w_n \\ \varphi_n \end{Bmatrix}, \quad (17)$$

Отсюда:

$$\{\alpha\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L_e & L_e^2 & L_e^3 \\ 0 & 1 & 2L_e & 3L_e^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} w_m \\ \varphi_m \\ w_n \\ \varphi_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{L_e^2} & -\frac{2}{L_e} & 0 & \frac{3}{L_e^2} & -\frac{1}{L_e} \\ 0 & \frac{2}{L_e^3} & \frac{1}{L_e^2} & 0 & -\frac{2}{L_e^3} & \frac{1}{L_e^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m \\ w_m \\ \varphi_m \\ u_n \\ w_n \\ \varphi_n \end{Bmatrix} = [\Phi] \{U_{bend}^e\}. \quad (18)$$

Прогибы в пределах конечного элемента запишем в виде:

$$w = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \{\alpha\} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} [\Phi] \{U_{bend}^e\} = [\Psi] \{U_{bend}^e\}. \quad (19)$$

Вектор, соответствующий линейным изгибным относительным деформациям в пределах конечного элемента:

$$\{\varepsilon_{bend}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0^L \\ \chi_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_e} & 0 & 0 & \frac{1}{L_e} & 0 & 0 \\ & & -\frac{\partial^2[\Psi]}{\partial x^2} & & & \end{bmatrix} \{U_{bend}^e\} = [B_{bend}] \{U_{bend}^e\}, \quad (20)$$

где:

$$\frac{\partial^2[\Psi]}{\partial x^2} = [0 \ 0 \ 2 \ 6x][\Phi]. \quad (21)$$

Нелинейная часть осевой относительной деформации:

$$\varepsilon_0^{NL} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} \{U_{bend}^e\} \right)^2 = \frac{1}{2} \{U_{bend}^e\}^T \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} \{U_{bend}^e\}. \quad (22)$$

Вариация нелинейной части осевой относительной деформации:

$$\delta \varepsilon_0^{NL} = \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} = \delta \{U_{bend}^e\}^T \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} \{U_{bend}^e\}. \quad (23)$$

Интеграл  $I_2^{plane}$  для каждого из субэлементов имеет вид:

$$\begin{aligned} I_2^{plane} &= \int_{V_p} \delta \{ \varepsilon_{pl}^p \}^T \lambda_b \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ 0 \end{Bmatrix} dV = \int_{V_p} \delta \{ \varepsilon_{pl}^p \}^T \lambda_b \begin{Bmatrix} \varepsilon_0^L + \varepsilon_0^{NL} + z\chi_0 \\ \varepsilon_0^L + \varepsilon_0^{NL} + z\chi_0 \\ 0 \end{Bmatrix} dV = \\ &= \delta \{U_{pl}^p\}^T \int_{V_p} [B_{pl}]^T \lambda_b \begin{bmatrix} 1 & z \\ 1 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0^L \\ \chi_0 \end{Bmatrix} dV + \delta \{U_{pl}^p\}^T \int_{V_p} [B_{pl}]^T \lambda_b \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \varepsilon_0^{NL} dV. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя равенства (20), (22) в (24), получим:

$$\begin{aligned} I_3^{plane} &= \delta \{U_{pl}^p\}^T \int_{A_p} [B_{pl}]^T \lambda_b dA \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{1}{2} \{U_{bend}^e\}^T \int_{L_e} \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} dx \{U_{bend}^e\} + \\ &+ \delta \{U_{pl}^p\}^T \int_{A_p} [B_{pl}]^T \lambda_b \begin{bmatrix} 1 & z \\ 1 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} dA \int_{L_e} [B_{bend}] dx \{U_{bend}^e\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Первое слагаемое выражения (7) для каждого из субэлементов:

$$\delta \Pi_{b,bend}^p = \int_{V_p} \delta \varepsilon_x \sigma_x dV = \int_{V_p} \delta \varepsilon_x (\lambda_b + 2\mu_b) \varepsilon_x dV + \int_{V_p} \delta \varepsilon_x \lambda_b (\varepsilon_y + \varepsilon_z) dV = I_1^{bend} + I_2^{bend}. \quad (26)$$

$$\begin{aligned} I_1^{bend} &= \int_{V_p} \delta (\varepsilon_0^L + z\chi_0) (\lambda_b + 2\mu_b) (\varepsilon_0^L + z\chi_0) dV + \int_{V_p} \delta \varepsilon_0^{NL} (\lambda_b + 2\mu_b) (\varepsilon_0^L + z\chi_0) dV + \\ &+ \int_{V_p} \delta (\varepsilon_0^L + z\chi_0) (\lambda_b + 2\mu_b) \varepsilon_0^{NL} dV + \int_{V_p} \delta \varepsilon_0^{NL} (\lambda_b + 2\mu_b) \varepsilon_0^{NL} dV. \end{aligned} \quad (27)$$

Последним слагаемым равенства (27) пренебрегаем в силу его большего порядка малости. Преобразуем (27):

$$\begin{aligned}
 I_1^{bend} = & \int_{V_p} \delta \left[ \begin{matrix} \varepsilon_0^L & \chi_0 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z \end{matrix} \right\} (\lambda_b + 2\mu_b) [1 \quad z] \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_0^L \\ \chi_0 \end{matrix} \right\} dV + \\
 & + \delta \left\{ U_{bend}^e \right\}^T \int_{V_p} \frac{\partial[\Psi]^T}{\partial x} \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} \left\{ U_{bend}^e \right\} (\lambda_b + 2\mu_b) [1 \quad z] \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_0^L \\ \chi_0 \end{matrix} \right\} dV + \\
 & + \int_{V_p} \delta \left[ \begin{matrix} \varepsilon_0^L & \chi_0 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z \end{matrix} \right\} (\lambda_b + 2\mu_b) \frac{1}{2} \left\{ U_{bend}^e \right\}^T \frac{\partial[\Psi]^T}{\partial x} \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} dV \left\{ U_{bend}^e \right\}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Раскроем интегралы по объёму субэлемента как двойные интегралы по площади субэлемента и его толщине (длине КЭ) и приведём (28) к виду:

$$\begin{aligned}
 I_1^{bend} = & \delta \left\{ U_{bend}^e \right\}^T \int_{L_e} [B_{bend}]^T \int_{A_p} (\lambda_b + 2\mu_b) \begin{bmatrix} 1 & z \\ z & z^2 \end{bmatrix} dA [B_{bend}] dx \left\{ U_{bend}^e \right\} + \\
 & + \delta \left\{ U_{bend}^e \right\}^T \int_{L_e} \left( \frac{\partial[\Psi]^T}{\partial x} \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} \right) \left\{ U_{bend}^e \right\} \int_{A_p} (\lambda_b + 2\mu_b) [1 \quad z] dA [B_{bend}] dx \left\{ U_{bend}^e \right\} + \\
 & + \delta \left\{ U_{bend}^e \right\}^T \int_{L_e} ([B_{bend}]^T \int_{A_p} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z \end{matrix} \right\} (\lambda_b + 2\mu_b) dA \frac{1}{2} \left\{ U_{bend}^e \right\}^T \frac{\partial[\Psi]^T}{\partial x} \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} dx \left\{ U_{bend}^e \right\}.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Второй интеграл в выражении (26):

$$\begin{aligned}
 I_2^{bend} = & \int_{V_p} \delta \varepsilon_x \lambda_b (\varepsilon_y + \varepsilon_z) dV = \int_{V_p} \delta \left\{ U_{bend}^e \right\}^T [B_{bend}]^T \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z \end{matrix} \right\} \lambda_b \{g\}^T \left\{ U_{pl}^p \right\} dV + \\
 & + \int_{V_p} \delta \left\{ U_{bend}^e \right\}^T \frac{\partial[\Psi]^T}{\partial x} \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} \left\{ U_{bend}^e \right\} \lambda_b \{g\}^T \left\{ U_{pl}^p \right\} dV = \\
 = & \delta \left\{ U_{bend}^e \right\}^T \int_{L_e} [B_{bend}]^T dx \int_{A_p} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z \end{matrix} \right\} \lambda_b \{g\}^T dA \left\{ U_{pl}^p \right\} + \delta \left\{ U_{bend}^e \right\}^T \int_{L_e} \frac{\partial[\Psi]^T}{\partial x} \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} dx \left\{ U_{bend}^e \right\} \int_{A_e} \lambda_b \{g\}^T \left\{ U_{pl}^p \right\},
 \end{aligned} \tag{30}$$

здесь вектор  $\{g\}$ :

$$\begin{aligned}
 \{g\} = & \{b\} + \{c\}, \\
 \{b\}^T = & \frac{1}{2\Delta^e} [b_i \quad 0 \quad b_j \quad 0 \quad b_k \quad 0], \quad \{c\}^T = \frac{1}{2\Delta^e} [0 \quad c_i \quad 0 \quad c_j \quad 0 \quad c_k],
 \end{aligned} \tag{31}$$

значения элементов  $b$  и  $c$  векторов  $\{b\}$  и  $\{c\}$  зависят от координат узлов субэлемента и вычисляются аналогично случаю решения плоской задачи теории упругости при помощи МКЭ [6].

Матрица жёсткости бетонной части конечного элемента равняется сумме всех матриц субэлементов с учётом соответствующих им степеней свободы и имеет размерность

$$\begin{aligned}
 N \times N = & (6 + 2 \cdot N_{n,plane}) \times (6 + 2 \cdot N_{n,plane}): \\
 [K_b^e] = & \sum_{p=1}^{N_{e,plane}} \begin{bmatrix} [K_{b11}^e]_p & [K_{b12}^e]_p \\ [K_{b21}^e]_p & [K_{b22}^e]_p \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{32}$$

где  $N_{e,plane}$  – число плоских субэлементов в поперечном срезе. Значения подматриц  $[K_{bij}^e]_p$  определяются на основании того, что равенство (2) должно выполняться при произвольных значениях вариаций узловых перемещений.

Подматрица  $[K_{b11}^e]_p$  составлена на основе интеграла  $I_1^{bend}$ :

$$\begin{aligned}
 [K_{b11}^e]_p &= \int_{L_e} [B_{bend}]^T \left( \int_{A_p} (\lambda_b + 2\mu_b) \begin{bmatrix} 1 & z \\ z & z^2 \end{bmatrix} dA \right) [B_{bend}] dx + \\
 &+ \int_{L_e} \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} \{U_{bend}^e\} \left( \int_{A_p} (\lambda_b + 2\mu_b) \begin{bmatrix} 1 & z \\ z & z^2 \end{bmatrix} dA \right) [B_{bend}] dx + \\
 &+ \int_{L_e} [B_{bend}]^T \left( \int_{A_p} \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} (\lambda_b + 2\mu_b) dA \right) \frac{1}{2} \{U_{bend}^e\}^T \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} dx.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Подматрица  $[K_{b12}^e]_p$  получена на основе интеграла  $I_2^{bend}$ :

$$[K_{b12}^e]_p = \int_{L_e} [B_{bend}]^T dx \int_{A_p} \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} \lambda_b \{g\}^T dA + \int_{L_e} \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} dx \{U_{bend}^e\} \int_{A_p} \lambda_b \{g\}^T dA. \tag{34}$$

Подматрица  $[K_{b21}^e]_p$  получена на основе интеграла  $I_2^{plane}$ :

$$[K_{b21}^e]_p = \int_{A_p} [B_{pl}]^T \lambda_b \begin{bmatrix} 1 & z \\ 1 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} dA \int_{L_e} [B_{bend}] dx + \int_{A_p} [B_{pl}]^T \lambda_b dA \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \{U_{bend}^e\}^T \int_{L_e} \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} dx. \tag{35}$$

Подматрица  $[K_{b22}^e]_p$  получена на основе интеграла  $I_1^{plane}$ :

$$[K_{b22}^e]_p = \int_{A_p} [B_{pl}]^T [D_{pl}] [B_{pl}] dA \cdot L_e. \tag{36}$$

Матрица жёсткости, соответствующая стальной части сечения собирается аналогично бетонной, при этом в поперечном срезе используются ферменные элементы [8].

### Методы и материалы

Составление и решение системы МКЭ будем осуществлять с использованием программного комплекса MATLAB. Сетка плоских конечных субэлементов поперечных срезов принимается постоянной по всем конечным элементам и разбивается при помощи функции «initmesh()» библиотеки «Partial Differential Equation Toolbox» [9]. При этом с целью уменьшения размерности задачи в силу симметричности НДС в сечении рассматривается половина поперечного среза. Пример разбиения сетки субэлементов показан на рис. 3.

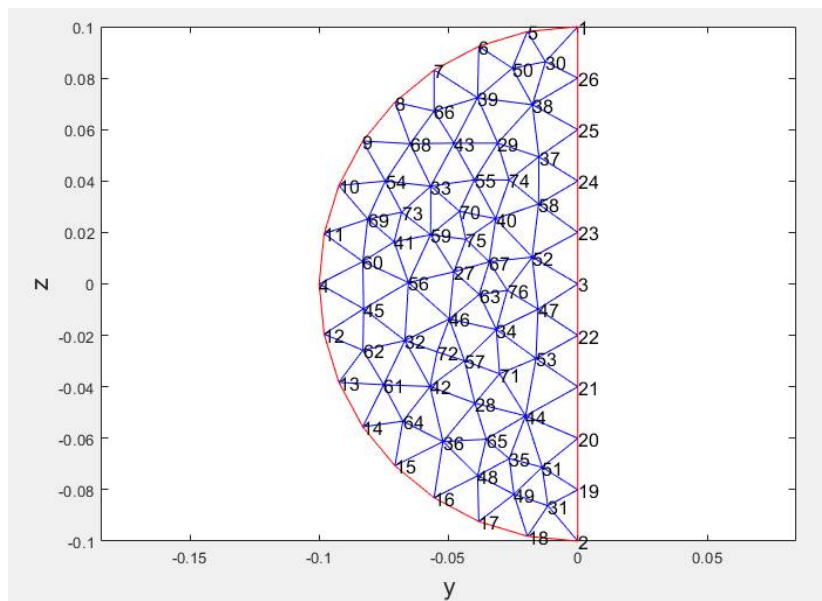


Рис. 3. Сетка субэлементов поперечного среза, построенная с помощью функции «initmesh()»  
Fig. 3. Cross-sectional sub-element mesh built with «initmesh ()» function

Диаметр бетонного сечения на рисунке 2.3 равен 0.2 м, параметр, соответствующий максимальному характерному размеру конечного субэлемента, « $H_{\max}$ » функции `initmesh()` выставлен равным 0.02 м, чёрным цветом показаны номера узлов субэлементов.

Напряжения вычисляются после определения узловых перемещений на каждой итерации по формулам, выраженным из обобщённого закона Гука.

При решении задач используем итерационный метод Ньютона-Рафсона, построенный на вычислении дополнительных перемещений на каждой итерации, вызванных невязкой сил (разницей вектора внутренних сил, полученного на основе напряжений в элементах, и вектора внешних нагрузок) [10].

Верификацию разработанного конечного элемента будем производить сопоставлением с решениями, полученными в ПК ANSYS с использованием объёмных и оболочечных конечных элементов.

По краям объёмной конечно-элементной модели колонны устанавливаем пластины большой жёсткости через функцию «Surface Coating» с целью устранения локальных краевых эффектов.

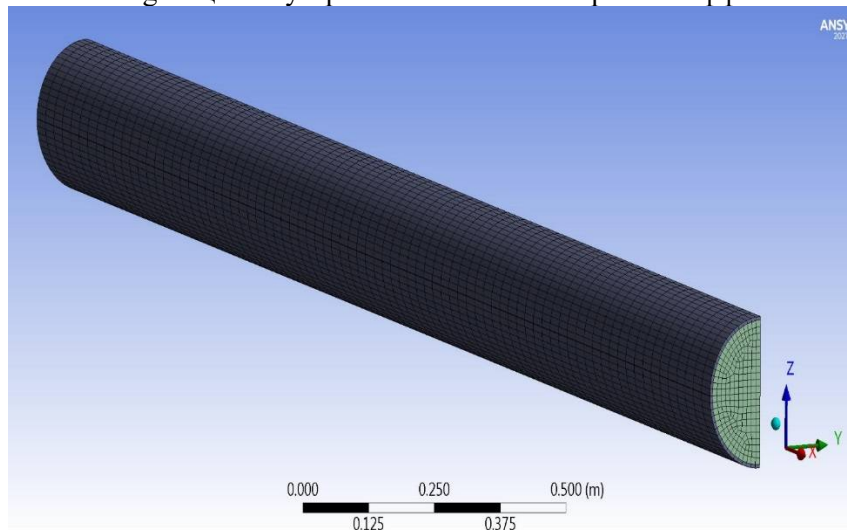


Рис. 4. Сетка субэлементов поперечного среза, построенная с помощью функции «initmesh()»  
Fig. 4. Cross-sectional sub-element mesh built with «initmesh ()» function



### Результаты и обсуждения

В качестве тестовой задачи рассмотрена шарнирно-опёртая труботонная колонна длиной 3 м со следующими характеристиками:  $d_b = 0.2$  м, поведение бетона и стали принято линейно-упругим с  $E_b = 3 \cdot 10^4$  МПа,  $E_s = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu_b = 0.2$ ,  $\nu_s = 0.3$ ,  $t_s = 0.005$  м, на колонну действует сжимающая сила  $F = 2.4$  МН, а также изгибающие моменты по шарнирно-опёртым краям  $M = 24$  кН·м, вызванные эксцентриситетом её приложения. Полученные результаты отображены на рис. 5. При решении в MATLAB использовано 10 составных конечных элементов по длине колонны.

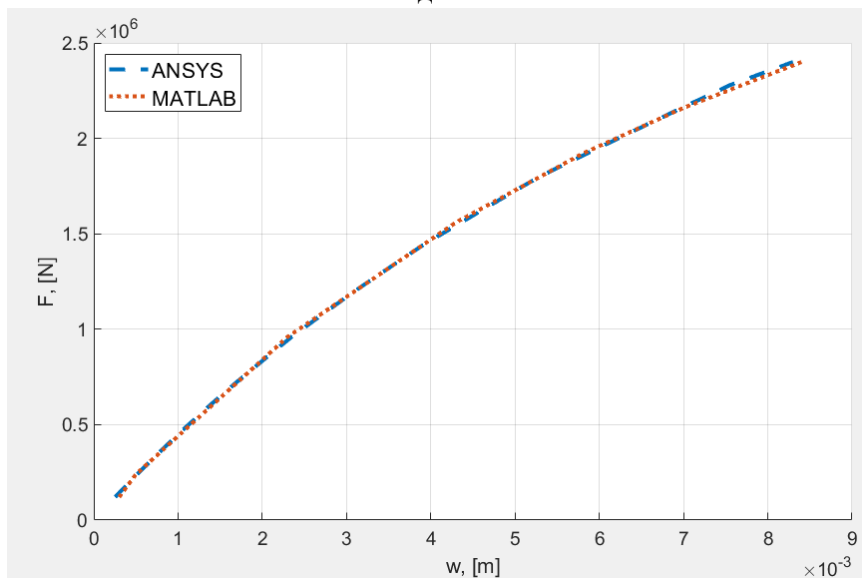


Рис. 5. Зависимость максимального прогиба от нагрузки  
Fig. 5. Maximum deflection versus load

Как видно из рисунка, результаты совпадают, при этом в случае решения в MATLAB было использовано 10 КЭ по длине, в случае решения в ANSYS для обеспечения сходимости результатов при сгущениях сетки объёмных конечных элементов было использовано деление длины колонны на 50 участков при построении сетки с использованием функции «Sweep Method» (высота призматических конечных элементов вдоль оси  $x$  равна длине участка).

Исследована сходимость в зависимости от числа используемых КЭ более подробно при иных значениях нагрузок.

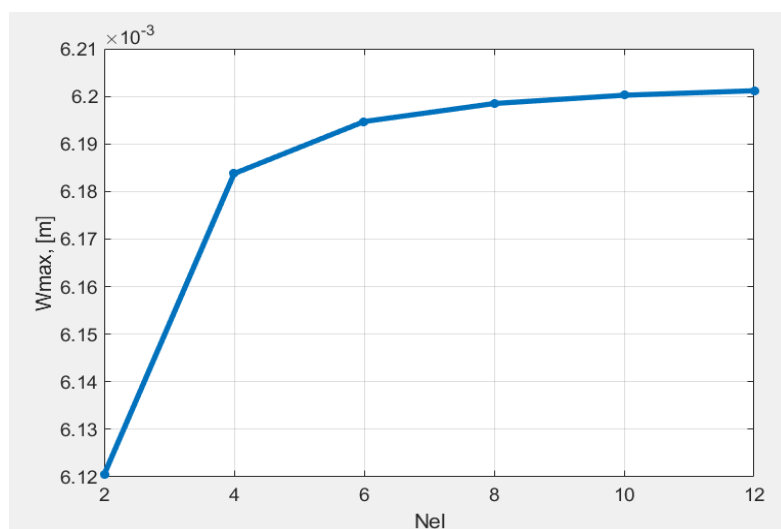


Рис. 6. Зависимость максимального прогиба от числа составных конечных элементов  $N_{el}$  по длине колонны при расчёте в MATLAB,  $F = 2$  МН,  $M = 20$  кН·м

Fig. 6. Dependence of the maximum deflection versus the number of complex finite elements  $N_{el}$  along the length of the column when calculating in MATLAB,  $F = 2$  MN,  $M = 20$  kN·m

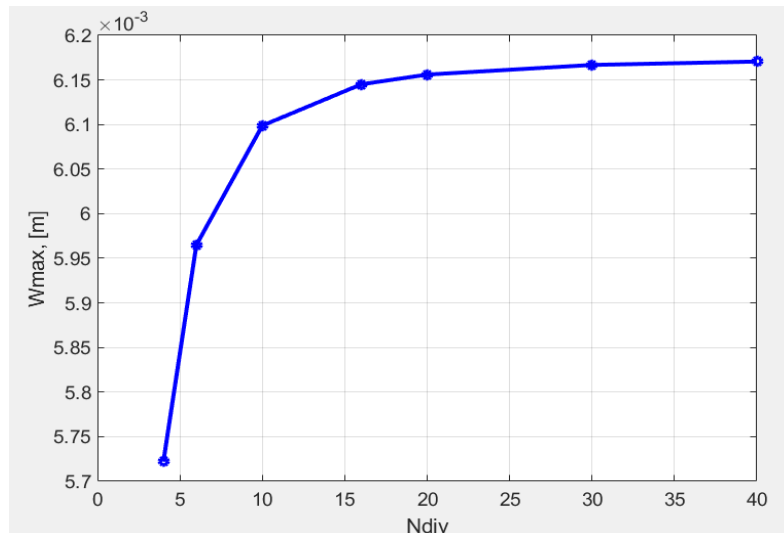


Рис. 7. Зависимость максимального прогиба от числа участков разбиения  $N_{div}$  сетки по длине колонны при расчёте в ANSYS (в качестве объёмных элементов четырёхугольные призмы),  $F = 2$  МН,  $M = 20$  кН·м

Fig. 7. Dependence of the maximum deflection versus from the number of mesh sections  $N_{div}$  along the length of the column when calculating in ANSYS (quadrilateral prisms are as volume elements)  $F = 2$  MN,  $M = 20$  kN·m

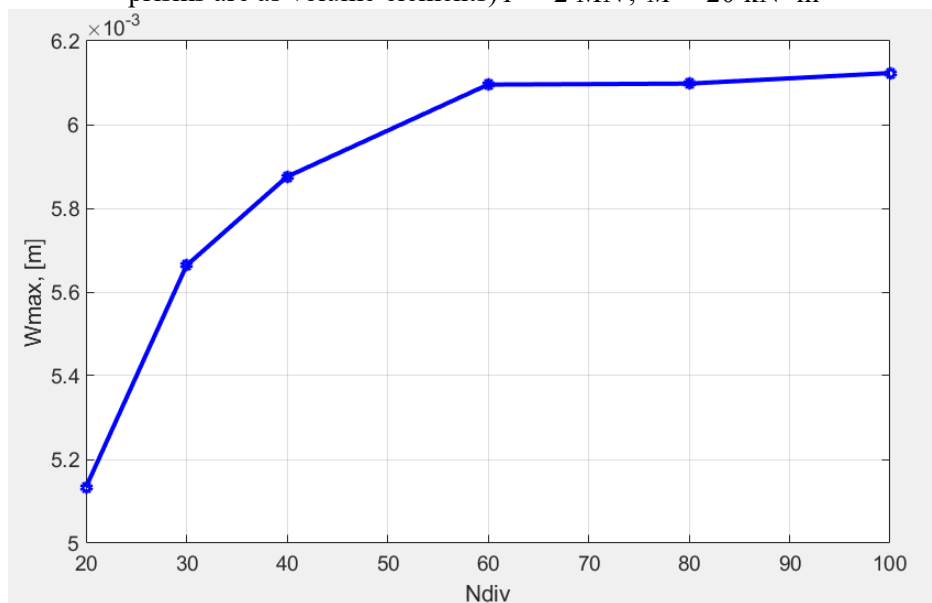


Рис. 8. Зависимость максимального прогиба от числа участков разбиения  $N_{div}$  сетки по длине колонны при расчёте в ANSYS (в качестве объёмных элементов треугольные призмы),  $F = 2$  МН,  $M = 20$  кН·м

Fig. 8. Dependence of the maximum deflection versus from the number of mesh sections  $N_{div}$  along the length of the column when calculating in ANSYS (triangular prisms are as volume elements)  $F = 2$  MN,  $M = 20$  kN·m

Как видно из рис. 6-8, сходимость результатов наблюдается, начиная с 8 составных КЭ по длине при решении с использованием MATLAB. В случае решения в ANSYS сходимость результатов начинается при делении колонны на 20 и более участков (при использовании четырёхугольных призм в качестве объёмных КЭ) и на 60 и более участков (при использовании треугольных призм в качестве объёмных КЭ). Разница в точности обусловлена снижением качества объёмных конечных элементов при их значительной вытянутости по длине, а также тем, что в случае применения составного КЭ при аппроксимации прогибов используется полином 4-ой степени, в случае объёмных КЭ в ANSYS без промежуточных узлов перемещения по оси  $z$  в зависимости от координаты  $x$  изменяются линейно.

При этом в случае 20 участков при использовании четырёхугольных призматических конечных элементов с характерным размером элемента в сечении 9 мм итоговое количество уравнений системы МКЭ равно 19104, а при использовании разработанных составных КЭ при их количестве по длине, равном 8, итоговое количество уравнений системы МКЭ равно 5643, что значительно меньше.

Отметим, что при расчётах трубобетонных элементов необходимо учитывать пластические деформации бетона, его частичное растрескивание при приближении напряжений к значениям расчётных сопротивлений, а также вызванную этим дилатацию материала, приводящую к дополнительному обжатию со стороны стали и повышению прочностных свойств бетона. К моделям бетона, учитывающим дилатационный эффект, относятся, например, деформационная модель пластичности Гениева [11], а также модель Менетрея-Виллама [12]. Интеграция таких моделей пластического поведения бетона в разработанный программный код является предметом дальнейших исследований.

### Выводы

1. Получена матрица жёсткости нового составного конечного элемента и соответствующий ему вектор нагрузок. Новый КЭ позволяет моделировать работу трубобетонных колонн с учётом геометрической нелинейности.
2. Разработана методика и программное обеспечение для моделирования работы гибких внецентренно-сжатых трубобетонных колонн в среде MATLAB.
3. Произведено апробирование и исследована сходимость результатов в зависимости от числа используемых КЭ по длине конструкции. Полученные результаты сопоставлены с решениями в классическом конечно-элементном комплексе ANSYS. Перспективами развития исследований в данном направлении является учёт физической нелинейности работы бетона с учётом дилатационных эффектов и пластических деформаций стальной обоймы.

### Литература

1. Cai S.H.. Modern Street Tube Confined Concrete Structures. Shanghai, China, Communication Press. 2003. 358 p.
2. Grigoryan M.N., Urvachev P.M., Chepurnenko A.S., Polyakova T.V. Determination of the ultimate load for centrally compressed concrete filled steel tubular columns based on the deformation theory of plasticity // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 913.
3. Madenci E., Guven I. The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS. London, Springer International Publishing. 2015. 657 p.
4. Kedziora S., Anwaar M.O.. Concrete-filled steel tubular (CFTS) columns subjected to eccentric compressive load // AIP Conference Proceedings 2060, 020004. 2019.
5. Reddy J.N. Energy Principles and Variational methods in Applied Mechanics. 2nd Edition. New York, John Wiley. 2002. 608 p.
6. Reddy J.N. An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. Oxford University Press. 2004. 721 p.
7. Segerlind L.J. Applied finite element analysis. New York, John Wiley. 1976. 422 p.
8. Chepurnenko V., Yazyev B., Urvachev P., Avakov A. Determination of stress-strain state of short eccentrically loaded concrete-filled steel tubular (CFST) columns using finite element method with reducing the problem from three-dimensional to two-dimensional // Construction and architecture. 2020. Vol. 8. № 4. P. 87 – 94. DOI 10.29039/2308-0191-2020-8-4-87-94
9. MATLAB Partial Differential Equation Toolbox: User's Guide, The MathWorks, Inc. 2019. 1784 p.
10. Гайджуров П.П. Методы, алгоритмы и программы расчёта стержневых систем на устойчивость и колебания: учебное пособие. Юж.-Рос. гос. техн. ун-т. Новочеркасск: ЮРГТУ, 2010. 230 с.
11. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. М.: Стройиздат, 1974. 316 с.
12. Willam K.J., Warnke E.P. Constitutive models for the triaxial behavior of concrete // Proceedings of the International Assoc. for Bridge and Structural Engineering. Vol. 19. P. 1 – 30.

### References

1. Cai S.H.. Modern Street Tube Confined Concrete Structures. Shanghai, China, Communication Press. 2003. 358 p.
2. Grigoryan M.N., Urvachev P.M., Chepurnenko A.S., Polyakova T.V., Grigoryan, M.N. Determination of the ultimate load for centrally compressed concrete filled steel tubular columns based on the deformation theory of plasticity. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. 913.
3. Madenci E., Guven I. The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS. London, Springer International Publishing. 2015. 657 p.
4. Kedziora S., Anwaar M.O. Concrete-filled steel tubular (CFTS) columns subjected to eccentric compressive load. AIP Conference Proceedings 2060, 020004. 2019.
5. Reddy J.N. Energy Principles and Variational methods in Applied Mechanics. 2nd Edition. New York, John Wiley. 2002. 608 p.
6. Reddy J.N. An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. Oxford University Press, 2004. 721 p.
7. Segerlind L.J. Applied finite element analysis. New York, John Wiley. 1976. 422 p.
8. Chepurnenko V., Yazyev B., Urvachev P., Avakov A. Determination of stress-strain state of short eccentrically loaded concrete-filled steel tubular (CFST) columns using finite element method with reducing the problem from three-dimensional to two-dimensional. Construction and architecture. 2020. 8 (4). P. 87 – 94. DOI 10.29039/2308-0191-2020-8-4-87-94
9. MATLAB Partial Differential Equation Toolbox: User's Guide, The MathWorks, Inc. 2019. 1784 p.
10. Gaydzhurov P.P. Methods, algorithms and programs for calculating rod systems for stability and vibrations: textbook. South-Russian State Technical University. Novocherkassk: SRSTU, 2010. 230 p. (rus.)
11. Geniev G.A., Kissyuk V.N., Tyupin G.A. Theory of plasticity of concrete and reinforced concrete. Moscow: Stroyizdat, 1974. 316 p. (rus.)
12. Willam K.J., Warnke E.P. Constitutive models for the triaxial behavior of concrete. Proceedings of the International Assoc. for Bridge and Structural Engineering. 19. P. 1 – 30.

*Chepurnenko V.S., Postgraduate,  
Khashkhozhev K.N., Postgraduate,  
Yazyev S.B.\*, Candidate of Engineering Sciences (Ph.D.), Associate Professor,  
Avakov A.A., Candidate of Engineering Sciences (Ph.D.), Associate Professor,  
Don State Technical University (DSTU), Russia*  
\*Corresponding author E-mail: ps62@yandex.ru

## IMPROVING THE CALCULATION OF FLEXIBLE CFST-COLUMNS, TAKING INTO ACCOUNT STRESSES IN THE SECTION PLANES

**Abstract:** the article is devoted to a newly developed complex finite element that allows modeling concrete-filled steel tubular columns taking into account the compression of the concrete core from the steel tube, as well as geometric nonlinearity. The derivation of the resolving equations, as well as expressions for the elements of the stiffness matrix, is based on the hypothesis of plane sections. The complex testing of the finite element was performed using the program code written by the authors in the MATLAB language and the ANSYS software, as well as the analysis of the effectiveness of the new FE in comparison with the classical methods of modeling CFST-columns in modern software systems. A significant decrease in the order of the system of FEM equations is demonstrated in comparison with the modeling of CFST-structures in a volumetric formulation in existing design complexes using SOLID elements for a concrete core with 3 degrees of freedom in each of the nodes, and SHELL elements for a steel tube with 6 degrees of freedom in each of the nodes, with a comparable accuracy in determining the stress-strain state. The behavior of steel and concrete in the presented work is assumed to be linearly elastic, however, the described calculation method can be generalized to the case of using nonlinear deformation models of materials.

**Keywords:** CFST-columns, finite element method, geometric nonlinearity, eccentric compression, column, stability

**Для цитирования:** Чепурненко В.С., Хашхожев К.Н., Языев С.Б., Аваков А.А. Совершенствование расчёта гибких трубобетонных колонн с учётом обжатия в плоскостях сечений // Строительные материалы и изделия. 2021. Том 4. № 3. С. 41 – 53. DOI: 10.34031/2618-7183-2021-4-3-41-53

**For citation:** Chepurnenko V.S., Khashkhozhev K.N., Yazyev S.B., Avakov A.A. Improving the calculation of flexible CFST-columns taking into account stresses in the section planes. Construction Materials and Products. 2021. 4 (3). P. 41 – 53. DOI: 10.34031/2618-7183-2021-4-3-41-53

*Поступила в редакцию 10 апреля 2021 г.  
Принята в доработанном виде 5 мая 2021 г.  
Одобрена для публикации 2 июня 2021 г.*

*Received: April 10, 2021.  
Revised: May 5, 2021.  
Accepted: June 2, 2021.*