



Строительные материалы и изделия
Construction Materials and Products

ISSN
2618-7183

journal homepage: <https://bstu-journals.ru>

DOI: 10.58224/2618-7183-2023-6-3-31-46



Уравнение трех бимоментов полусдвиговой теории
В.И. Сливкера для расчета многопролетных
тонкостенных балок

Рыбаков В.А.* ¹ 

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия,

**Ответственный автор E-mail: fishermanoff@mail.ru*

Аннотация: в данной статье рассмотрен метод статического расчета многопролетных тонкостенных балок при стесненном кручении в рамках полусдвиговой теории В.И.Сливкера. Основным достоинством полусдвиговой теории является то, что она подходит для стержней как открытого, так и замкнутого (а также открыто-замкнутого и многоконтурного) профилей ввиду схожести дифференциальных уравнений по теориям В.И. Сливкера и А.А. Уманского, а также повышается точность вычисления вследствие учета части деформации сдвига. Получено аналитическое решение задачи на основе системы уравнений трех бимоментов, в т.ч. значения коррелирующих функций для случаев приложения крутящих нагрузок в пролете и на консоли тонкостенных многопролетных неразрезных балок. Получены функции бимомента для ряда простых балок в рамках полусдвиговой теории. Показано, что значения параметра влияния формы сечения полусдвиговой теории колеблется в пределах от 1,000086 до 1,0014 для направляющих профилей, при этом наличие отгибов полок (С-профиль) по сравнению с направляющим профилем в пределах 10% снижает значение данного параметра, что свидетельствует о более низком вкладе части сдвиговых деформаций в НДС при стесненном кручении стоечного профиля. Показано, что несмотря на сходство результатов расчета предложенным методом ввиду близости значений параметра влияния формы к 1,0 с аналогичным по теории В.З. Власова, границы применения предложенного метода существенно шире (как открытые, так и замкнутые профили).

Ключевые слова: легкие стальные тонкостенные конструкции, стесненное кручение, многопролетные балки, тонкостенные стержни, бимомент, депланация, напряжение

Для цитирования: Рыбаков В.А. Уравнение трех бимоментов полусдвиговой теории В.И. Сливкера для расчета многопролетных тонкостенных балок // Строительные материалы и изделия. 2023. Том 6. № 3. С. 31 – 46. DOI: 10.58224/2618-7183-2023-6-3-31-46

Three Bimoments Equation of V.I. Slivker's Semi-Shear Theory for the Calculation of Multi-Span Thin-Walled Beams

Rybakov V.A.*¹ ,

¹ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

*Corresponding author E-mail: fishermanoff@mail.ru

Abstract: this article discusses the method of static calculation of multi-span thin-walled beams with bending torsion in the framework of the semi-shear theory of V.I.Slivker. The main advantage of the semi-shear theory is that it is suitable for rods of both open and closed (as well as open-closed and multi-contour) profiles due to the similarity of differential equations according to the theories of V.I. Slivker and A.A. Umansky, and also increases the accuracy of the calculation due to taking into account part of the shear deformation. The analytical solution of the problem is obtained based on three bimoments equations system of, including values of correlating functions for cases of application of torsional loads in the span and on the cantilever of thin-walled multi-span continuous beams. Bimoment functions for a number of simple beams are obtained within the framework of the semi-shear theory. It is shown that the values of the parameter of the influence of the shape of the cross-section of the semi-shear theory ranges from 1.000086 to 1.0014 for channel profiles, while the presence of shelf bends (C-profile) in comparison with the channel profile reduces the value of this parameter by 10%, which indicates a lower contribution of part of the shear deformations to the stress strain state at the torsion of the C-profile. It is shown that, despite the convergence of the calculation results by the proposed method, due to the proximity of the values of the shape influence parameter to 1.0 with the similar one according to the theory of V.Z. Vlasov, the area of application of the proposed method are significantly wider (both open and closed profiles).

Keywords: lightweight gauge steel structures, bending torsion, multi-span beams, thin-walled rods, bimoment, warping, stresses

Please cite this article as: Rybakov V.A. Three bimoments equation of V.I. Slivker's semi-shear theory for the calculation of multi-span thin-walled beams. Construction Materials and Products. 2023. 6. (3). P. 31 – 46. DOI: 10.58224/2618-7183-2023-6-3-31-46

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире роль стальных конструкций в строительстве объектов промышленного и гражданского назначения стремительно растет. Среди стальных конструкций можно выделить особый вид – конструкции из стальных тонкостенных холодногнутых оцинкованных профилей, имеющих устоявшееся название под аббревиатурой ЛСТК (легкие стальные тонкостенные конструкции), к числу преимуществ которых можно отнести пониженную металлоемкость (и, соответственно, вес), высокую скорость изготовления и сборки [1],[2] и др.

Характерной особенностью профилей ЛСТК, помимо оцинковки, является низкая толщина (0,6...3,0мм), обусловленная спецификой изготовления и являющаяся одной из причин, по которой методики расчета и проектирования стальных конструкций из «черного» металла не могут распространяться на ЛСТК, что, в первую очередь обусловлено повышенной ролью стесненного кручения в напряженно-деформированном состоянии.

Существует два направления в развитии инженерных расчетов ЛСТК:

- конечноэлементное моделирование элементов ЛСТК как совокупности большого числа пластин, оболочек или трехмерных тел;
- теории тонкостенных стержней.

Первый из указанных способов реализуется посредством программных комплексов, таких как SCAD Office, Lira САПР, SOFiSTiK [3, 4, 5, 6, 7], а также многих других. Точность таких способов, как правило, является приемлемой, однако трудоемкость их повышена, и поэтому в повседневном проектировании такие способы не являются удобными, особенно на этапе предварительного или вариантного проектирования.

Второе направление включает в себя как аналитических, так и приближенные способы расчета, основанные на использовании «седьмой» (депланационной) степени свободы, соответствующей бимоменту как внутреннему силовому фактору.

Однако, согласно [8, 9] известные еще с середины XX века и совершенствующиеся по сей день аналитические методы [10-13] и др., так же, как моделирование пластинами и оболочками, являются весьма трудоемкими ввиду сложности уравнений, на которых они основаны. Именно поэтому возникла потребность в совершенствовании численных методов расчета тонкостенных стреловой и стержневых систем.

Следует отметить, что в инженерной практике бимомент является важной характеристикой, поскольку он напрямую влияет на нормальные напряжения. В СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции», бимомент как силовой фактор фигурирует наравне с остальными силовыми факторами, о чем свидетельствует в данном СП формула (43) для поперечно-изгибаемых элементов при действии моментов в двух главных плоскостях и при наличии бимоента:

$$\frac{M_x}{I_{xp} R_y \gamma_c} y \pm \frac{M_y}{I_{yp} R_y \gamma_c} x \pm \frac{B_w}{I_{wp} R_y \gamma_c} \omega \leq 1 \quad (1)$$

Формулы СП 16.13330.2016 под номерами (53) – прочность при изгибе в плоскости наибольшей жесткости и стесненном кручении симметричных двутавров; (70) – устойчивость при изгибе в двух главных плоскостях и наличии бимоента; (105) и (106) – прочность внецентренно сжатых внецентренно растянутых элементов, – по своей сути являются модификацией формулы (3), приведенной выше.

В нормах по проектированию ЛСТК – СП 260.13330.2016 «Конструкции стальные тонкостенные из холодногнутых оцинкованных профилей и гофрированных листов», – в первой бимомент как силовой фактор в прямом виде не упоминается. Однако несмотря на то, что авторы изменения №2 от 10.08.2021 сделали оговорку, состоящую в том, что все формулы для расчета прочности и устойчивости применимы при соблюдении сформулированного условия: конструктивный элемент не подвержен свободному или стесненному кручению либо надежно раскреплен по своей длине от кручения и влияния изгибно-крутящего бимоента В, бимомент и секториальный крутящий момент косвенно фигурируют в определении величин напряжений. При действии в сечении элемента крутящего момента или изгибно-крутящего бимоента и отсутствии надежного его раскрепления от кручения расчет поперечного сечения по прочности следует выполнять в соответствии с формулами (7.75) и (7.85):

$$\sigma_{tot,r} = \sigma_{N,r} + \sigma_{My,r} + \sigma_{Mx,r} + \sigma_{w,r} \quad (2)$$

$$\tau_{tot,r} = \tau_{Qy,r} + \tau_{Qx,r} + \tau_{t,r} + \tau_{w,r} \quad (3)$$

в которых $\sigma_{N,r}, \sigma_{My,r}, \sigma_{Mx,r}, \sigma_{w,r}$ – составляющие нормальных напряжений от продольной силы, изгибающих моментов в двух плоскостях и бимоента, соответственно; $\tau_{Qy,r}, \tau_{Qx,r}, \tau_{t,r}, \tau_{w,r}$ – составляющие касательных напряжений от двух продольных сил, момента чистого и стесненного кручения, соответственно.

При этом согласно теоретическим и экспериментальным исследованиям [8, 14-16], в тонкостенных конструкциях, находящихся в условиях изгибно-кручения, составляющая нормальных напряжений от бимоента может значительно превышать составляющую от изгибающего момента, а влияние касательных напряжений на напряженно-деформированное состояние мало по сравнению с влиянием нормальных напряжений.

Поэтому, с учетом того, что бимомент является производной некоторого порядка от функций перемещений, и его вычисление с помощью МКЭ сопровождается значительными неточностями вычислений целесообразно развитие и аналитических способов вычисления бимоментов.

Одним из аналитических методов, применимых для неразрезных многопролетных тонкостенных балок является метод, основанный на решении системы уравнения трех бимоментов. Данный метод впервые опубликован в теории В.З. Власова в 1960 г. в [17] и применим для многопролетных тонкостенных балок только открытого профиля.

В диссертации А.А. Гаврилова [18] данный метод реализован для сдвиговой теории (учитывающей полную деформацию сдвига), но его применение практически трудоемко ввиду необходимости вычисления соответствующих коэффициентов формы.

В данной работе рассмотрим реализацию уравнения трех бимоментов для полусдвиговой теории В.И. Сливкера [19], учитывающей только часть деформации сдвига и применимой для стержней как открытого, так и замкнутого профилей.

Основным достоинством полусдвиговой теории является то, что она подходит для стержней как открытого, так и замкнутого (а также открыто-замкнутого и многоконтурного) профилей ввиду схожести дифференциальных уравнений по теориям В.И. Сливкера [19] и А.А. Уманского [13], а также повышается точность вычисления вследствие учета части деформации сдвига.

Ранее автором данной статьи в рамках указанной полусдвиговой теории в [20] были построены и исследованы различные типы конечных элементов для профилей открытого типа в [21] типа и замкнутого типа в [22], соответствующих способам аппроксимации функций формы:

Целью данной работы является получение уравнения трех бимоментов в полусдвиговой теории В.И.Сливкера [19] для решения задач о стесненном кручении многопролетных неразрезных тонкостенных балок.

Продолжим численные исследования данного конечного элемента и рассмотрим некоторые тестовые задачи о стесненном кручении тонкостенного стержня, но уже на примере замкнутого профиля, продемонстрировав главное достоинство теории В.И.Сливкера – универсальность ее применения как для открытых, так и замкнутых профилей.

МЕТОДЫ И МАТЕРИАЛЫ

Рассмотрим многопролётную балку с n пролетами и $(n+1)$ опорами под воздействием произвольной изгибно-крутящей нагрузки. Пронумеруем опоры от 0 до n , а пролеты от 1 до n .

На всех опорах сечения закреплены от поворота (угол поворота θ равен 0); крайние опоры имеют дебалансионные шарниры [23] (сечение может свободно дебалансировать, внутренний бимомент B_ω в них равен 0). Все промежуточные опоры будут иметь неравный нулю бимомент.

С точки зрения теории изгиба, все опоры будем считать шарнирно подвижные, за исключением первой, которая шарнирно неподвижна. Однако, согласно системе уравнений равновесия полусдвиговой теории В.И. Сливкера [19],

$$\begin{cases} -EA\zeta'' = q_x \\ -EI_y\xi^{IV} + q_z = 0 \\ -EI_x\eta^{IV} + q_y = 0 \\ -\psi EI_\omega\beta^{III} + GI_t\beta' + m_x + \psi m'_B = 0 \end{cases} \quad (4)$$

изгибные деформации математически не связаны с крутильными, поэтому будем оперировать только с факторами, относящимися к стесненному кручению.

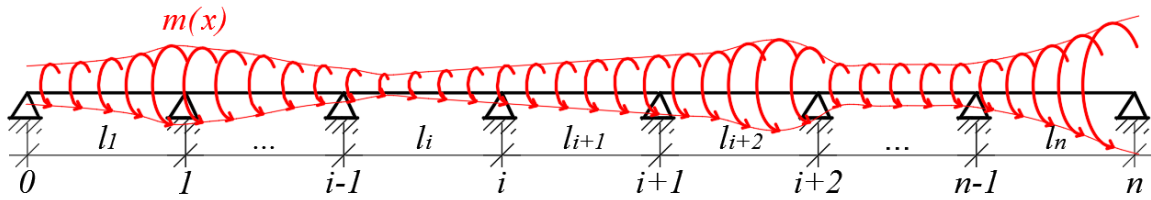


Рис. 1. Расчетная схема

Fig. 1. Analytical model

Введем депланационные шарниры во все промежуточные опоры. Для того, чтобы полученная расчетная схема была эквивалентна исходной, приложим пар-но с двух сторон от каждой опоры внешние бимоменты ($B_{\omega 1}$ и $-B_{\omega 1}$; $B_{\omega 2}$ и $-B_{\omega 2}$; ...; $B_{\omega i}$ и $-B_{\omega i}$; ...; $B_{\omega n}$ и $-B_{\omega n}$)

Далее представим расчетную схему (рис. 2) под воздействием нагрузки как суперпозицию n схем – основное (рис.3) и единичных (рис. 4).

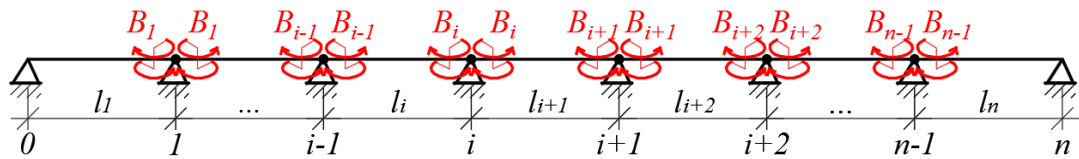


Рис. 2. «Основная» истема и ее эквивалентное состояние (внешняя нагрузка не показана)

Fig. 2. "Basic" structure and its equivalent state (external load is not shown)

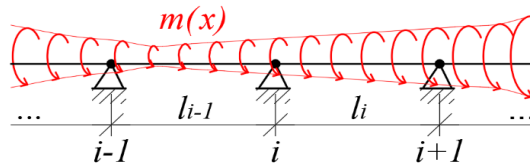


Рис. 3. Основное грузовое состояние

Fig. 3. "Basic" load state

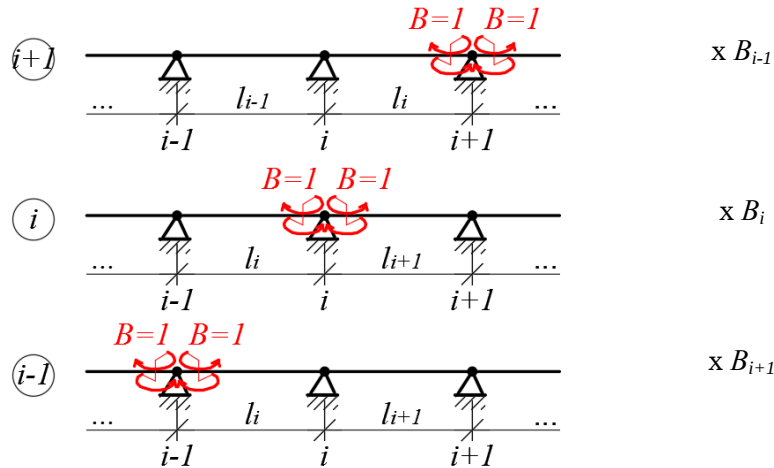


Рис. 4. Вспомогательные состояния

Fig. 4. "Unit" load states

Как видно из рис. 2-4, расчетная схема представляет собой совокупность простых балок, имеющих с двух сторон депланационные шарниры.

Для того, чтобы совокупность схем (рис. 3-4) была эквивалентна исходной схеме, сформируем условие эквивалентности: мера взаимной деформации сечений с двух сторон от каждой i опоры должна быть равна нулю, т.к. в исходной расчетной схеме депланационного шарнира нет:

$$\Delta\beta_i = 0 \quad (5)$$

С учетом суперпозиции загрузений, эквивалентных исходному (рис. 1):

$$\Delta\beta_{i,i-1}B_{i-1} + \Delta\beta_{i,i}B_i + \Delta\beta_{i,i+1}B_{i+1} + \Delta\beta_{i,p} = 0 \quad (6)$$

Мера взаимной деформации является суммой деформаций в сечениях слева и справа от опоры

$$\beta_{i,i+1}^{np}B_{i-1} + (\beta_{i,i}^{лев} + \beta_{i,i}^{np})B_i + \beta_{i,i+1}^{лев}B_{i+1} + (\beta_{1,p}^{лев} - \beta_{1,p}^{np}) = 0 \quad (7)$$

Меры деформации $\beta_{i,j}^{лев}$ и $\beta_{i,j}^{np}$ можно определить, решив уравнение стесненного кручения для бипартирно опертой балки с единичным загрузением (рис. 5).

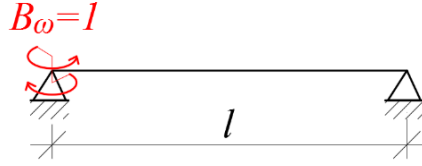


Рис. 5. Вспомогательное состояние для одного пролета

Fig. 5. "Unit" load state for single span

Перемещем четвертое уравнение системы (1) с учетом отсутствия внешних распределенных силовых факторов:

$$\psi EI_{\omega} \beta''' - GI_t \beta' = 0 \quad (8)$$

Граничные условия для левого ($x = 0$) и правого ($x = l$) концов:

$$\theta(0) = 0, B_{\omega}(0) = 1, \theta(l) = 0, B_{\omega}(l) = 0. \quad (9)$$

где B_{ω} – бимомент в сечении, определяемый в полусдвиговой теории как

$$B_{\omega} = -EI_{\omega} \beta' \quad (10)$$

Введя обозначение $\beta' = \alpha$ перепишем уравнение (5) в классической постановке:

$$\alpha'' - k^2 \alpha = 0 \quad (11)$$

где введено обозначение характеристического числа, являющегося изгибно-крутильной характеристикой полусдвиговой теории:

$$k = \sqrt{\frac{GI_t}{\psi EI_{\omega}}} \quad (12)$$

Уравнение (8) имеет общее решение:

$$\alpha = \beta' = Ach(kx) + Bsh(kx) \quad (13)$$

Что соответствует функциям бимомента и деформации, с учетом (7), соответственно:

$$B_{\omega}(x) = -EI_{\omega}(Ach(kx) + Bsh(kx)) \quad (14)$$

$$\beta = \frac{A}{k} sh(kx) + \frac{B}{k} ch(kx) + C \quad (15)$$

Из уравнения, приведенного в [19]

$$EI_{\omega}\beta'' - \frac{r^2 GA}{\mu_{\omega\omega}}(\theta' - \beta) = m_B \quad (16)$$

в котором $\mu_{\omega\omega} = \frac{(\psi-1)I_r}{I_t}$ и $r^2 = \frac{I_r}{A}$, можно выразить функцию угла закручивания:

$$\theta(x) = \frac{A}{\psi k^2} ch(kx) + \frac{B}{\psi k^2} sh(kx) + Cx + D \quad (17)$$

Подставив граничные условия (6) в (11) и (14) запишем окончательные выражения для функций деформации и бимоента

$$B_{\omega}(x) = ch(kx) - \frac{ch(kl)}{sh(kl)} sh(kx) \quad (18)$$

$$\beta(x) = \frac{1}{\psi EI_{\omega}} \left[\frac{ch(kl)}{sh(kl)} \cdot ch(kx) - sh(kx) - \frac{1}{\psi kl} \right] \quad (19)$$

Деформация слева и справа составят, соответственно:

$$\beta(0) = \frac{1}{kEI_{\omega}} \left[\frac{ch(kl)}{sh(kl)} - \frac{1}{\psi kl} \right], \quad \beta(l) = \frac{1}{kEI_{\omega}} \left[\frac{1}{sh(kl)} - \frac{1}{\psi kl} \right] \quad (20)$$

Меры деформации $\beta_{i,p}^{лев}$ и $\beta_{i,p}^{np}$ для уравнения (4) можно определить из решения задачи о стесненном кручении простой балки под основным нагружением. Решения наиболее часто встречающихся задач о стесненном кручении простых представлены в табл. 1.

Таблица 1. Функции бимоментов на участках «основной» системы («простые» балки) и опорные значения деформации по полусдвиговой теории В.И.Сливкера
Table 1. Bimoments functions of the “general” system sections (“simple” beams) and support warping values according to V.I. Slivker’s semi-shear theory

№	Основная схема	$\beta^{лев} *$	$\beta^{прав} *$	$B_{\omega}(x)$	Эпюра B_{ω}
1		$-\frac{Pe}{GI_t} \left[\frac{l-a}{l} - \frac{sh(k(l-a))}{sh(kl)} \right]$	$\frac{Pe}{GI_t} \left[\frac{a}{l} - \frac{sh(ka)}{sh(kl)} \right]$	$B_{\omega 1}(x) = -\frac{Pe}{2\psi k} \frac{sh(kx)}{ch(\frac{kl}{2})}$, при $0 \leq x \leq a$ $B_{\omega 2}(x) = -\frac{Pe}{2\psi k} \frac{sh(k(l-x))}{ch(\frac{kl}{2})}$, при $a \leq x \leq l$	
2		$-\frac{Pe}{2GI_t} \left[1 - \frac{1}{ch(\frac{kl}{2})} \right]$	$\frac{Pe}{2GI_t} \left[1 - \frac{1}{ch(\frac{kl}{2})} \right]$	$B_{\omega 1}(x) = \frac{Pesh(k(l-a))}{\psi k sh(kl)} \cdot sh(kx)$, при $0 \leq x \leq a$ $B_{\omega 2}(x) = -\frac{Pesh(ka)}{\psi k sh(kl)} \cdot sh(k(l-x))$, при $a \leq x \leq l$	
3		$-\frac{qe}{kGI_t} \left[\frac{kl}{2} - th(\frac{kl}{2}) \right]$	$\frac{qe}{kGI_t} \left[\frac{kl}{2} - th(\frac{kl}{2}) \right]$	$B_{\omega}(x) = -\frac{qe}{k^2 \psi} \left(\frac{ch(k(\frac{l}{2}-x))}{ch(\frac{kl}{2})} - 1 \right)$	
4		$-\frac{Pe}{GI_t}$	не требуется	$B_{\omega} = 0$	-
5		$-\frac{qe}{kGI_t} \left[-kl + th(\frac{kl}{2}) \right]$	не требуется	$B_{\omega} = \frac{qe}{\psi k^2 EI_{\omega}} \cdot \left(1 - \frac{ch(k(x - \frac{l}{2}))}{ch(\frac{kl}{2})} \right)$	

* $\beta^{лев}$ и $\beta^{прав}$ - значения деформаций на левой и правой опорах

Из (16) и (17) видно, что мера деформации обратно пропорциональна секториальной жесткости. Поэтому уравнение (4) можно переписать по форме уравнения трех моментов Б.П.Э.Клайперона [24],[25], в котором $\varphi_i^{лев}$ и $\varphi_i^{прав}$ - коррелирующие функции, соответствующие мере деформации, соответственно, слева и справа от единичного сосредоточенного бимоменты, приложенного на левой опоре i -го звена «основной» системы – простой бишарнирной балки.

$$B_{i-1}l_i\varphi_i^{прав} + 2B_i(l_i\varphi_i^{лев} + l_{i+1}\varphi_{i+1}^{лев}) + B_{i+1}l_{i+1}\varphi_{i+1}^{прав} = -6EI_{\omega}(\beta_{i,p}^{лев} - \beta_{i,p}^{прав}) \quad (21)$$

Данные функции определяются в соответствии с формулами (19), полученными из (17); $\beta_{i,p}^{лев}$ и $\beta_{i,p}^{прав}$ – значения деформаций слева и справа от рассматриваемой i -той опоры (табл. 1) при воздействии внешней нагрузки, приложенной к «основной» системе – совокупности простых бишарнирных балок, а B_i – неизвестные опорные бимоменты.

$$\varphi_i^{лев} = \frac{3}{kl_i} \left[\frac{ch(kl_i)}{sh(kl_i)} - \frac{1}{\psi kl_i} \right], \quad \varphi_i^{прав} = \frac{6}{kl_i} \left[\frac{1}{sh(kl_i)} - \frac{1}{\psi kl_i} \right] \quad (22)$$

Назовем уравнение (18) уравнением трех бимоментов полусдвиговой теории В.И. Сливкера.

Применяя уравнение трех бимоментов последовательно к каждой паре смежных пролетов, получим столько уравнений, сколько неизвестных опорных бимоментов имеет рассматриваемая балка.

Так же, как и в уравнении трех моментов, если многопролетная балка имеет заделанный конец, то заделку нужно рассматривать как добавочный пролет, длину которого в процессе вычислений следует принять $l_i=0$ или $l_n=0$.

При наличии на одном или двух концах балки свешивающейся консоли в «основной» системе будет иметься стержень, имеющий одну бишарнирную опору. Соответствующие значения для мер деформаций $\beta_{i,p}$ для таких случаев даны также в табл. 1.

Однако значения коррелирующих функций со стороны консоли будут другими – при наличии консоли на левом конце балки слева от опоры 1 и на правом конце балки справа от опоры n , соответственно:

$$\varphi_0^{лев*} = \frac{3}{kl_0} \frac{ch(kl_0)}{sh(kl_0)}; \quad \varphi_{n+1}^{лев*} = \frac{3}{kl_{n+1}} \frac{ch(kl_{n+1})}{sh(kl_{n+1})} \quad (23)$$

После решения системы из уравнений (18) итоговую эпюру бимоментов по всей длине балки можно получить суперпозицией эпюр:

- грузовых для каждого пролета основной системы (табл. 1)
- от неизвестных бимоментов, найденных на каждой опоре.

В отличие от решения задачи изгиба уравнением 3 моментов, эти эпюры будут не прямолинейными, а гиперболическими. Из формулы (15) получаем выражения (21)-(22) для функции бимомента справа от опоры i и слева от опоры i , соответственно.

которое с учетом формулы сложения можно упростить:

$$B_{\omega}^{np}(x) = B_i \frac{sh(k(l-x))}{sh(kl)} \quad (24)$$

$$B_{\omega}^{лев}(x) = B_i \frac{sh(kx)}{sh(kl)} \quad (25)$$

Отметим, что описанная выше методика является универсальной – подходит для расчета тонкостенных многопролетных балок как открытого профиля, так и замкнутого.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

Рассмотрим диапазон значений параметра ψ для наиболее часто встречающихся на практике оцинкованных холодногнутых профилей (на примере сортаментов направляющих профилей типа ПН-ХХ толщиной 1,5 мм производства ООО «Балтпрофиль» по ТУ 1121-001-13830080-2003. «Профили стальные оцинкованные для системы каркасного строительства» и стоечных профилей типа ПС-ХХ-1,5 толщиной 1,5 мм производства ООО «Стройпанель» по СТО 25.11.23 -002- 65536585-2017 «Профили стальные гнутые для производства зданий и сооружений по технологии ЛСТК. Технические условия») колеблется в пределах от 1,000086 до 1,0014 (рис. 5).

Также из рис. 5 видно, что наличие отгибов полок С-профиля по сравнению с направляющим профилем несколько снижает (в пределах 10%) значение параметра ψ , что свидетельствует о более низком вкладе части сдвиговых деформаций в НДС при стесненном кручении.

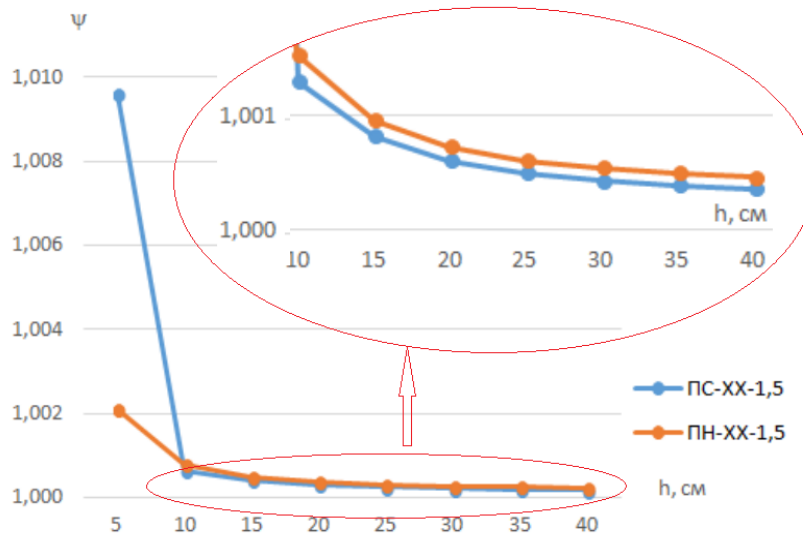


Рис. 5. График зависимости $\psi(h)$ для профилей ПН и ПС шириной 50мм и толщиной 1,5мм
Fig. 5. Dependence graph $\psi(h)$ for PN and PS profiles 50 mm wide and 1.5 mm thick

При расчете МКЭ (численный способ) данный параметр требует особо точного вычисления, т.к. с учетом малости деформации сдвига γ_ω третье слагаемое подынтегрального выражения функционала (23) для открытых профилей является отношением малых чисел.

$$E(\theta, \beta) = \frac{1}{2} \int_0^l (EI_\omega (\beta')^2 + GI_t (\theta')^2 + \frac{GI_t}{\psi - 1} (\theta' - \beta')^2) dx \quad (26)$$

Покажем это на примере вычисления коррелирующих функций (табл. 2).

Таблица 2. Значения величин для уравнения трёх бимоментов для открытых профилей при $\psi = 1,00$, при $\psi = 1,001$ и при $\psi = 1,01$
Table 2. Values for the three bimoments equation for open profiles at $\psi = 1.00$, at $\psi = 1.001$ and at $\psi = 1.01$

$k \cdot l$	φ^{np} при $\psi =$			$\varphi^{лев}$ при $\psi =$			$k \cdot l$	φ^{np} при $\psi =$			$\varphi^{лев}$ при $\psi =$		
	1,00	1,001	1,01	1,00	1,001	1,01		1,00	1,001	1,01	1,00	1,001	1,01
0,1	-1,000	-0,399	4,942	0,999	1,299	3,97	5,0	-0,224	-0,224	-0,221	0,480	0,480	0,481
0,2	-0,995	-0,846	0,49	0,997	1,072	1,74	5,5	-0,189	-0,189	-0,187	0,446	0,446	0,447
0,4	-0,982	-0,944	-0,61	0,989	1,008	1,175	6,0	-0,162	-0,162	-0,16	0,417	0,417	0,417
0,6	-0,959	-0,943	-0,795	0,977	0,985	1,059	6,5	-0,139	-0,139	-0,138	0,391	0,391	0,391
0,8	-0,930	-0,921	-0,837	0,959	0,964	1,006	7,0	-0,121	-0,121	-0,12	0,367	0,367	0,368
1,0	-0,894	-0,888	-0,835	0,939	0,942	0,969	7,5	-0,106	-0,106	-0,105	0,347	0,347	0,347
1,2	-0,854	-0,850	-0,813	0,916	0,918	0,936	8,0	-0,093	-0,093	-0,092	0,328	0,328	0,329
1,4	-0,811	-0,808	-0,78	0,890	0,891	0,905	8,5	-0,083	-0,083	-0,082	0,311	0,311	0,312
1,6	-0,765	-0,763	-0,742	0,863	0,864	0,874	9,0	-0,074	-0,074	-0,073	0,296	0,296	0,297
1,8	-0,719	-0,717	-0,701	0,834	0,835	0,844	9,5	-0,066	-0,066	-0,066	0,283	0,283	0,283
2,0	-0,673	-0,671	-0,658	0,806	0,807	0,813	10,0	-0,060	-0,060	-0,059	0,270	0,270	0,27
2,5	-0,563	-0,562	-0,554	0,736	0,737	0,741	10,5	-0,054	-0,054	-0,054	0,259	0,259	0,259
3,0	-0,467	-0,466	-0,46	0,672	0,672	0,675	11,0	-0,050	-0,05	-0,049	0,248	0,248	0,248
3,5	-0,386	-0,386	-0,381	0,614	0,614	0,616	11,5	-0,045	-0,045	-0,045	0,238	0,238	0,238
4,0	-0,320	-0,320	-0,316	0,563	0,563	0,565	12,0	-0,042	-0,042	-0,041	0,229	0,229	0,229
4,5	-0,267	-0,266	-0,264	0,519	0,519	0,52	12,5	-0,038	-0,038	-0,038	0,221	0,221	0,221

Поэтому при решении рассматриваемым аналитическим методом практических задач о кручении большинства открытых профилей допускается округление до 1,0 без потери инженерной точности и таким образом решение задачи с малой погрешностью совпадет с решением уравнения трех бимоментов по [17].

Однако при решении задач о стесненном кручении замкнутых профилей ситуация иная. Рассмотрим пример приложения предложенного метода трех бимоментов к задаче о стесненном кручении неразрезной балки замкнутого профиля - двухпролётной балки прямоугольного сечения 180x100x4 по ГОСТ 30245-2012 «Профили стальные гнутые замкнутые сварные квадратные и прямоугольные для строительных конструкций. Технические условия», нагруженную в одном пролёте равномерной нагрузкой $q = 2$ кН/м (рисунок 2.12) с эксцентриситетом $e = 2$ см с геометрическими характеристиками:

- секториальный момент инерции $I_{\omega} = 1159,51$ см⁶;
- момент инерции при кручении $I_t = 839,63$ см⁴;
- параметр влияния формы сечения $\psi = 14,47$.

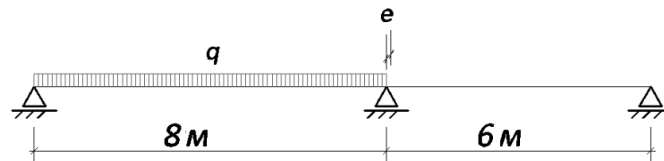


Рис. 6. Двухпролётная неразрезная балка

Fig. 6. Double-span continuous beam

Изгибно-крутильная характеристика, по формуле (9):

$$k = \sqrt{\frac{0,81 \cdot 10^{11} \cdot 839,63}{1,0049 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1159,51}} = 0,13893 \text{ см}^{-1}.$$

Определим коррелирующие коэффициенты по формуле (19):

$$\varphi_1^{\text{лев}} = 0,02698, \quad \varphi_2^{\text{лев}} = 0,03596.$$

Т.к. бимоменты на крайних бишарнирных опорах равны нулю, то $B_0 = B_2 = 0$ и уравнение трёх бимоментов (18) будет выглядеть следующим образом:

$$2B_1(l_1\varphi_1^{\text{лев}} + l_2\varphi_2^{\text{лев}}) = -6EI_{\omega}(\beta_{1,p}^{\text{лев}} - \beta_{1,p}^{\text{прав}}) \quad (27)$$

Значения депланаций слева и справа от центральной опоры основной системы, по табл. 1:

$$\beta_{1,p}^{\text{лев}} = \frac{qe}{kEI_t} \left(\frac{kl_1}{2} - \frac{sh \frac{kl_1}{2}}{ch \frac{kl_1}{2}} \right); \quad \beta_{1,p}^{\text{прав}} = 0 \quad (28)$$

Подставив (25) в (24), с учетом изгибно-крутильной характеристики (9), получим уравнение

$$2B_1(l_1\varphi_1^{\text{лев}} + l_2\varphi_2^{\text{лев}}) = -\frac{6qe}{\psi k^3} \left(\frac{kl_1}{2} - \frac{sh \frac{kl_1}{2}}{ch \frac{kl_1}{2}} \right),$$

решением которого является значение неизвестного бимоментов на центральной опоре:

$$B_1 = -\frac{6qe}{\psi k^3} \left(\frac{kl_1}{2} - \frac{sh \frac{kl_1}{2}}{ch \frac{kl_1}{2}} \right) \cdot \frac{1}{2(l_1\varphi_1^{\text{лев}} + l_2\varphi_2^{\text{лев}})}.$$

После вычислений получаем $B_1 = -3,91$ кН·см².

Построим эпюру бимоментов. Для первого и второго пролётов от бимоментов B_1 , приложенного на центральной опоре, согласно формулам (22) и (21), соответственно:

$$B_{\omega}^{лев}(x) = B_1 \frac{sh(kx)}{sh(kl_1)}; B_{\omega}^{пр}(x) = B_1 \frac{sh(k(l_2 - x))}{sh(kl_2)}.$$

Построим эпюру от приложенной пары сосредоточенных бимоментов на второй опоре (рис. 7):

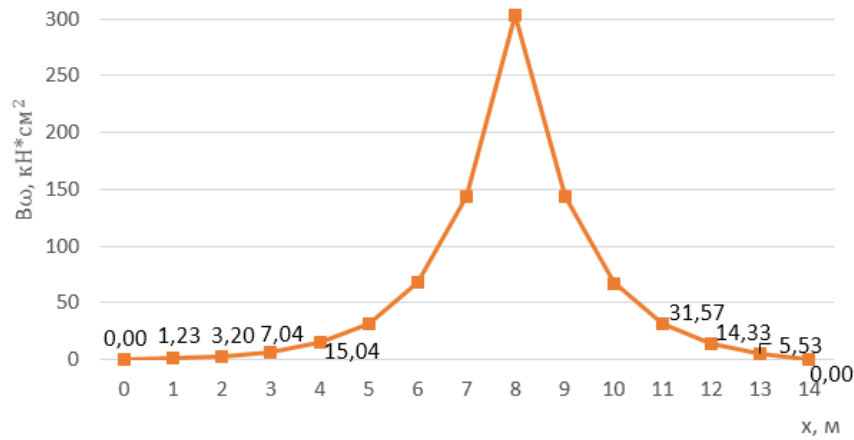


Рис. 7. Эпюра бимомента от вспомогательного состояния
Fig. 7. Bimoment diagram of "unit" state

Эпюру бимомента $B_{\omega}(x)$ от приложенной равномерной нагрузки построим по формуле третьей расчетной схемы табл. 1:

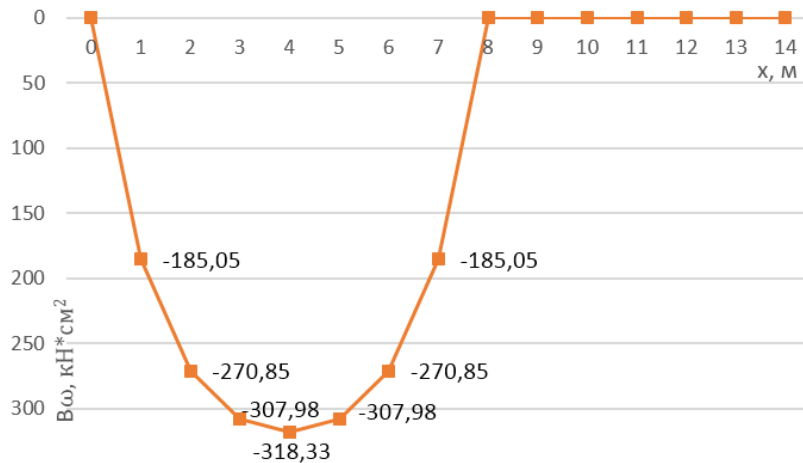


Рис. 8. Эпюра бимомента от грузового состояния
Fig. 8. Bimoment diagram of "basic" load state

Построим суммарную эпюру бимоментов для данной схемы. (рис.9)

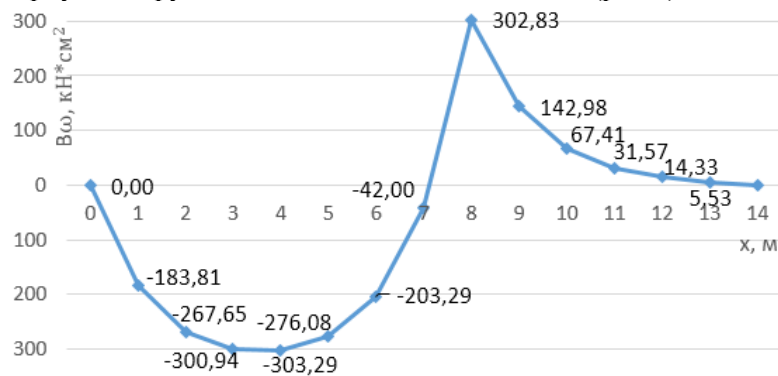


Рис. 9. Результирующая эпюра бимомента
Fig. 9. Result bimoment diagram

ВЫВОДЫ

1. Получено аналитическое решение задачи на основе системы уравнений трех бимоментов в рамках полусдвиговой теории В.И. Сливкера, являющееся универсальной для расчета многопролетных тонкостенных балок как открытого, так и замкнутого профилей;
2. Получены значения коррелирующих функций уравнения трех бимоментов для решения уравнения трех бимоментов в полусдвиговой теории В.И. Сливкера для случаев приложения крутящих нагрузок в пролете и на консоли тонкостенных многопролетных неразрезных балок;
3. Получены функции бимомента для ряда простых балок в рамках полусдвиговой теории В.И. Сливкера;
4. Показано, что значения параметра влияния формы сечения полусдвиговой теории колеблется в пределах от 1,000086 до 1,0014 для направляющих профилей. При этом наличие отгибов полок (С-профиль) по сравнению с направляющим профилем в пределах 10% снижает значение данного параметра, что свидетельствует о более низком вкладе части сдвиговых деформаций в НДС при стесненном кручении стоечного профиля;
5. Показано, что несмотря на сходство результатов расчета предложенным методом ввиду близости значений параметра влияния формы к 1,0 с аналогичным по теории В.З. Власова, границы применения предложенного метода существенно шире (как открытые, так и замкнутые профили).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шевцов С.В., Астафьева Н.С. Концепция модульного строительства на примере использования легких металлических конструкций // Инженерные исследования. 2022. № 3 (8). С. 30 – 37.
- [2] Советников Д.О., Виденков Н.В., Трубина Д.А. Легкие стальные тонкостенные конструкции в многоэтажном строительстве // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 3 (30). С. 152 – 165. DOI: 10.18720/CUBS.30.11
- [3] Бондарь В.Т. Сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния профилированных листов С-44-1.5 мм, С-21-1.5 мм, СМС-D02-01А 1.6 // Инженерные исследования. 2022. № 3 (8). С. 11 – 19.
- [4] Гордеева А.О., Ватин Н.И. Расчетная конечно-элементная модель холодногнутого перфорированного тонкостенного стержня в программно-вычислительном комплексе SCAD Office // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 3 (21). С. 36 – 46. DOI: 10.18720/MCE.21.2
- [5] Nazmeeva T., Sivokhin A. Numerical investigations of the connections between cold-formed steel curtain walls and reinforced concrete slabs // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. № 456 (1). DOI:10.1088/1757-899X/456/1/012081
- [6] Власов П.П., Лалина И.И., Савченко А.В., Емельянов Е.В., Нестеров А.А. Конечно-элементный анализ стальной опоры в ПК SCAD // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 11 (38). С. 27 – 41. DOI: 10.18720/CUBS.38.3
- [7] Назмеева Т.В., Ватин Н.И. Численные исследования сжатых элементов из холодногнутого просечного Спрофиля с учетом начальных несовершенств // Инженерно-строительный журнал. 2016. № 2 (62). С. 92 – 101. DOI: 10.5862/MCE.62.9
- [8] Рыбаков В.А., Гамаюнова О.С. Напряженно-деформированное состояние элементов каркасных сооружений из тонкостенных стержней // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2013. № 7 (12). С. 79 – 123. DOI: 10.18720/CUBS.12.10
- [9] Советников Д.О., Азаров А.А., Иванов С.С., Рыбаков В.А.. Методы расчета тонкостенных стержней: статика, динамика, устойчивость // AlfaBuild. 2018. № 3 (1). С. 7 – 33.
- [10] Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни М.: Госиздатфизматлит, 1959. 508 с.

- [11] Gebre T.H., Galishnikova V.V. The impact of section properties on thin walled beam sections with restrained torsion // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. № 1687 (1). DOI:10.1088/1742-6596/1687/1/012020
- [12] Белый Г.И. Расчет упругопластических тонкостенных стержней по пространственнодеформируемой схеме // *Межвуз. темат. сб. тр. (Строительная механика сооружений)*. 1983. № 42. С. 40 – 48.
- [13] Уманский А.А. Изгиб и кручение тонкостенных авиационных конструкций М.: Оборониздат, 1939. 112 с.
- [14] Galishnikova V. A theory for space frames with warping restraint at nodes. *Advances in the Astronautical Sciences*. 2020. 170. P. 763 – 784.
- [15] Туснин А.Р. Численный расчет конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля. М.: МГСУ, Изд-во Ассоц. строит. вузов, 2009. 143 с.
- [16] Перельмутер А.В., Юрченко В.В. К вопросу о расчете пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля // *Металлические конструкции*. 2014. Т. 20. № 3. С. 179 – 190.
- [17] Кузьмин Н.Л., Лукаш П.А., Милейковский И.Е. Расчет конструкций из тонкостенных стержней и оболочек. М.: Госстройиздат, 1960. 266 с.
- [18] Гребенюк Г.И., Гаврилов, А.А., Яньков Е.В. Расчет и оптимизация неразрезной балки тонкостенного профиля // *Известия вузов. Строительство*. 2013. № 7. С. 3 – 11.
- [19] Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы: учебное пособие. М.: Изд-во АСВ, 2005. 736 с.
- [20] Лалин В.В., Рыбаков В.А. Конечные элементы для расчета ограждающих конструкций из тонкостенных профилей // *Инженерно-строительный журнал*. 2011. № 8 (26). С. 69 – 80. DOI: 10.5862/MCE.26.11
- [21] Лалин В.В., Рыбаков В.А., Морозов С.А. Исследование конечных элементов для расчета тонкостенных стержневых систем // *Инженерно-строительный журнал*. 2012. № 1 (27). С. 53 – 73. DOI: 10.5862/MCE.27.7
- [22] Rybakov, V.A. The V.I. Slivker's semi-shear theory finite elements research for calculation of thin-walled closed profile rods // *AlfaBuild*. 2022. № 24 (4). P. 2403 – 2403. DOI:10.57728/ALF.24.3
- [23] Rybakov V.A., Sovetnikov D.O., Jos V.A. Bending torsion in Г-shaped rigid and warping hinge joints // *Magazine of Civil Engineering*. 2020. № 99 (7). Article No. 9909. DOI: 10.18720/MCE.99.9
- [24] Константинов И.А., Лалин В.В., Лалина И.И. Строительная механика. Расчет стержневых систем с использованием программы SCAD: учебно-методический комплекс. Часть 2. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 228 с.
- [25] Гребенников М.Н., Дибир А.Г., Пекельный Н.И.. Расчёт многопролётных неразрезных былок. Уравнение трёх моментов. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т “Харьк. авиац. ин-т,” 2010. 46 с.

REFERENCES

- [1] Shevtsov S.V., Astafyeva N.S. The concept of modular construction on the example of the use of light metal structures. *Engineering research*. 2022. 3 (8). P. 30 – 37. (rus.)
- [2] Sovetnikov D.O., Videnkov N.V., Trubina D.A. Light steel thin-walled structures in multi-storey construction. *Construction of unique buildings and structures*. 2015. 3 (30). P. 152 – 165. DOI: 10.18720/CUBS.30.11(rus.)
- [3] Bondar V.T. Comparative analysis of the stress-strain state of profiled sheets S-44-1.5 mm, S-21-1.5 mm, CIMC-D02-01A 1.6. *Engineering Research*. 2022. 3 (8). P. 11 – 19. (rus.)

- [4] Gordeeva A.O., Vatin N.I. Computational finite element model of a cold-bent perforated thin-walled rod in the SCAD Office software and computing complex. Civil Engineering Journal. 2011. 3 (21). P. 36 – 46. DOI: 10.18720/MCE.21.2 (rus.)
- [5] Nazmeeva T., Sivokhin A. Numerical investigations of the connections between cold-formed steel curtain walls and reinforced concrete slabs. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. 456 (1). DOI:10.1088/1757-899X/456/1/012081
- [6] Vlasov P.P., Lalina I.I., Savchenko A.V., Emelyanov E.V., Nesterov A.A. Finite element analysis of steel support in SCAD PC. Construction of unique buildings and structures. 2015. 11 (38). P. 27 – 41. DOI: 10.18720/CUBS.38.3 (rus.)
- [7] Nazmeeva T.V., Vatin N.I. Numerical studies of compressed elements from a cold-bent cutting profile taking into account initial imperfections. Civil Engineering Journal. 2016. 2 (62). P. 92 – 101. DOI: 10.5862/MCE.62.9 (rus.)
- [8] Rybakov V.A., Gamayunova O.S. Stress-strain state of elements of frame structures made of thin-walled rods. Construction of unique buildings and structures. 2013. 7 (12). P. 79 – 123. DOI: 10.18720/CUBS.12.10 (rus.)
- [9] Sovetnikov D.O., Azarov A.A., Ivanov S.S., Rybakov V.A. Methods of calculation of thin-walled rods: statics, dynamics, stability. AlfaBuild. 2018. 3 (1). P. 7 – 33. (rus.)
- [10] Vlasov V.Z. Thin-walled elastic rods M.: Gosizdat fizmatlit, 1959. 508 p (rus.)
- [11] Gebre T.H., Galishnikova V.V. The impact of section properties on thin walled beam sections with restrained torsion. Journal of Physics: Conference Series. 2020. 1687 (1). DOI:10.1088/1742-6596/1687/1/012020
- [12] Bely G.I. Calculation of elastic-plastic thin-walled rods according to a spatially deformable scheme. Inter-university. temat. sb. tr. (Construction mechanics of structures).1983. 42. P. 40 – 48. (rus.)
- [13] Umansky A.A. Bending and torsion of thin-walled aircraft structures M.: Oboronizdat, 1939. 112 p. (rus.)
- [14] Galishnikova V. A theory for space frames with warping restraint at nodes. Advances in the Astronautical Sciences. 2020. 170. P. 763 – 784.
- [15] Tusnin A.R. Numerical calculation of structures made of thin-walled rods of an open profile. Moscow: MSUACE, Publishing House. Assoc. of Build. Universities, 2009. 143 p. (rus.)
- [16] Perelmuter A.V., Yurchenko V.V. On the calculation of spatial structures made of thin-walled rods of an open profile. Metal structures. 2014. 20 (3). P. 179 – 190. (rus.)
- [17] Kuzmin N.L., Lukash P.A., Mileykovsky I.E. Calculation of structures made of thin-walled rods and shells. Moscow: Gosstroizdat, 1960. 266 p. (rus.)
- [18] Grebenyuk G.I., Gavrilov A.A., Yankov E.V. Calculation and optimization of a continuous beam of a thin-walled profile. News of universities. Construction. 2013. 7. P. 3 – 11. (rus.)
- [19] Slivker V.I. Construction mechanics. Variational foundations: textbook. Moscow: Publishing House of the ASV, 2005. 736 p. (rus.)
- [20] Lalin V.V., Rybakov V.A. Finite elements for the calculation of enclosing structures made of thin-walled profiles. Civil Engineering Journal. 2011. 8 (26). P. 69 – 80. DOI: 10.5862/MCE.26.11(rus.)
- [21] Lalin V.V., Rybakov V.A., Morozov S.A. Investigation of finite elements for calculation of thin-walled rod systems. Civil Engineering Journal. 2012. 1 (27). P. 53 – 73. DOI: 10.5862/MCE.27.7(rus.)
- [22] Rybakov, V.A. The V.I. Slivker's semi-shear theory finite elements research for calculation of thin-walled closed profile rods. AlfaBuild. 2022. 24 (4). P. 2403 – 2403. DOI:10.57728/ALF.24.3
- [23] Rybakov V.A., Sovetnikov D.O., Jos V.A. Bending torsion in Γ -shaped rigid and warping hinge joints. Magazine of Civil Engineering. 2020. 99 (7). Article No. 9909. DOI: 10.18720/MCE.99.9

- [24] Konstantinov I.A., Lalin V.V., Lalina I.I. Construction mechanics. Calculation of core systems using the SCAD program: educational and methodical complex. Part 2. St. Petersburg: Publishing House of the Polytechnic University, 2009. 228 p. (rus.)
- [25] Grebennikov M.N., Dibir A.G., Pekelny N.I. Calculation of multi-span continuous beams. The equation of three moments. Kharkiv: Nat. Aerospace University "Kharkiv Aviation University," 2010. 46 p. (rus.)

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ / INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Рыбаков В.А., e-mail: fishermanoff@mail.ru, тел. +7(911) 829-77-67, ORCID ID: 0000-0002-2299-3096, SCOPUS ID: <http://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=56437629800>, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», Высшая школа промышленно-гражданского и дорожного строительства, кандидат технических наук, доцент

Rybakov V.A., e-mail: fishermanoff@mail.ru, tel.: +7(911) 829-77-67, ORCID ID: 0000-0002-2299-3096, SCOPUS ID: <http://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=56437629800>, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Department «Industrial, Civil and Road construction», Candidate of Engineering Sciences (Ph.D.), Associate Professor

Поступила в редакцию 21 марта 2023 г.
Принята в доработанном виде 26 апреля 2023 г.
Одобрена для публикации 14 мая 2023 г.

Received: March 21, 2023.
Revised: April 26, 2023.
Accepted: May 14, 2023.